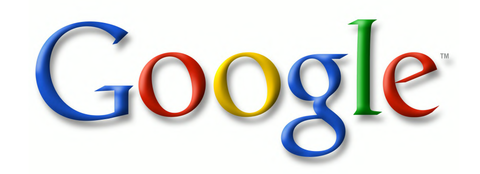





Gen Pet. 70



ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES

EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

193

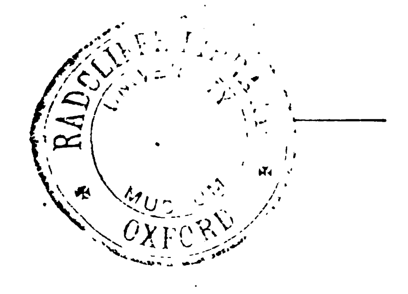
E. H. VON BAUMHAUER

Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLOBORATION DE

MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster,
C. H. D. Buijs Ballot et C. K. Hoffmann.

TOME XVI.



HARLEM,
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1881.

TABLE DES MATIÈRES.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES GAZ,

ET LA PROPAGATION DU SON SUIVANT LA THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ,

PAR

H. A. LORENTZ.

Peu de temps après l'apparition du premier mémoire de M. Clausius sur la théorie moléculaire des gaz, M. Jochmann [1]) objecta que cette théorie serait incapable de rendre compte des phénomènes du mouvement des gaz, notamment de ceux du mouvement sonore. Il avait été conduit à cette objection par l'idée que la nouvelle manière de voir pourrait bien expliquer la pression d'un gaz sur un autre corps, mais non la pression mutuelle de couches gazeuses juxtaposées.

Dès que M. Clausius eut montré que les molécules des gaz ne viennent pas seulement se heurter à un corps étranger, mais entrent très souvent aussi en collision entre elles, cette difficulté s'évanouit et la possibilité d'une explication dut être concédée. Aussi divers physiciens traitèrent-ils, depuis ce temps,

---

[1]) Pogg. *Ann.*, t. 108.

les deux questions suivantes: Quelle est dans la nouvelle théorie le mécanisme du mouvement sonore, en d'autres termes, comment se comportent les molécules gazeuses lors de ce mouvement, et quelle relation existe-t-il entre la vitesse du son V et la vitesse moyenne V' des molécules?

M. Stefan [1]) et M. Roiti [2]), sans entrer dans beaucoup de détails sur la première de ces questions, essayèrent de résoudre la seconde.

Le premier de ces savants trouva $\frac{V}{V'}=\sqrt{\frac{1}{3}}$, le second successivement $\frac{V}{V'}=\frac{1}{2}$ et $=\frac{2}{3}$, résultats dont aucun n'est, en général, d'accord avec l'expérience. Postérieurement, M. Roiti a tâché d'obtenir un résultat meilleur en admettant que dans le mouvement sonore les molécules ne se meuvent plus d'une manière égale dans toutes les directions; mais, dans l'analyse [3]) de son Mémoire, qui seule m'a été accessible, je n'ai pas trouvé l'exposition approfondie des raisons sur lesquelles il fonde cette opinion.

Une réponse à la première des deux questions susdites a été donnée par M. Tolver Preston [4]). L'auteur, toutefois, se bornant à des considérations très élémentaires, n'est pas en état de calculer la valeur de V. Il mentionne seulement que M. Maxwell, pour un gaz monoatomique, dont les molécules sont regardées comme des sphères élastiques, a obtenu pour $\frac{V}{V'}$ la valeur $\frac{\sqrt{5}}{3}$, qui, à en juger par les expériences de MM. Kundt et Warburg [5]) sur la vapeur du mercure, est exacte.

---

[1]) Pogg. *Ann.*, t. 118.
[2]) *Atti della R. Accad. dei Lincei* (3) I.
[3]) Pogg. *Ann.*, Beibl. t. 2.
[4]) *Phil. Mag.* (5) III.
[5]) Pogg. *Ann.*, t. 157.

M. Hoorweg [1]) a abordé le problème par la voie mathématique, mais, à mon avis, on ne saurait regarder cette tentative comme ayant été couronnée de succès. Diverses objections y ont déjà été faites par M. Rink [2]); ici, il suffira de faire remarquer qu'en réalité M. Hoorweg n'a déduit de la nouvelle théorie que l'équation de la continuité. Quant à ses autres équations, il les obtient en posant d'abord, sans démonstration suffisante, me semble-t-il, une équation intégrale de la même forme que celle qu'on rencontre dans l'ancienne théorie du son [3]). M. Rink lui-même arrive à la conclusion que les conséquences déduites de la théorie cinétique des gaz ne cadrent pas avec ce qu'on observe dans la propagation du son. Plus loin je reviendrai sur les raisonnements qui l'ont conduit à cette conclusion.

Si les savants qui viennent d'être cités n'ont pas réussi à donner une explication satisfaisante du mouvement sonore, M. Maxwell, bien que ne s'étant pas occupé expressément de la question, a indiqué la voie dans laquelle cette explication doit être cherchée. Dans son second Mémoire [4]) sur la théorie des gaz, il a, en effet, établi les *équations du mouvement* de ces corps, ce qui suffit pleinement pour expliquer le mouvement du son. Tant que M. Maxwell n'introduit aucune hypothèse particulière sur l'action réciproque des molécules gazeuses, il n'obtient toutefois les équations du mouvement que sous une forme générale, qui ne suffit pas aux applications [5]); elles contiennent, en effet, les composantes de la pression, sans que celles-ci soient présentées comme dépendantes de la densité, de la température et du mouvement du gaz. Pour arriver à exprimer cette dépendance, il est fait usage de l'hypothèse que les molécules se repoussent avec une force inversement proportionnelle à la cinquième puissance de la distance. Une pareille hypothèse

[1]) *Arch. néerl.*, t. XI.
[2]) *Arch. néerl.*, t. XII.
[3]) *loc. cit.*, p. 139, 140.
[4]) *Phil. Mag.* (4) XXXV.
[5]) *loc. cit.*, p. 198.

pouvant difficilement être acceptée, il faut chercher à en affranchir l'établissement des équations du mouvement. Cette modification faite, les considérations de M. Maxwell ne laissent plus à désirer, sous le rapport de la rigueur, qu'en ce qui concerne les gaz polyatomiques.

J'ai en conséquence essayé d'établir, pour ces gaz aussi, les équations du mouvement, sans recourir à des hypothèses particulières sur l'action réciproque des molécules. Lorsqu'on veut seulement donner en traits généraux une explication du mouvement sonore, on peut s'en tenir à la considération de dérangements infiniment petits de l'état d'équilibre, et négliger les forces extérieures, ainsi que le frottement interne et la conductibilité calorifique. Mais, en vue d'autres applications des équations du mouvement, j'ai admis dès le début l'existence de forces extérieures et de dérangements finis, et plus tard j'ai aussi fait entrer en ligne de compte le frottement et la conductibilité calorifique.

§ 1. Etablissement de l'équation fondamentale.

Dans l'étude des mouvements moléculaires des gaz polyatomiques, nous suivrons la marche indiquée par M. Boltzmann [1]; l'objet propre de la recherche sera donc la manière dont les différents états de mouvement sont répartis sur les différentes molécules.

La détermination de cet état pour une molécule — que nous supposons pour le moment dégagée de toute influence de la part des autres — exige qu'on connaisse, pour chaque temps t, d'abord les composantes ξ, η, ζ de la vitesse de son centre de gravité suivant trois axes perpendiculaires entre eux, et en second lieu les coordonnées relatives, prises par rapport à ce même centre de gravité, de chacun des points matériels dont la molécule est composée. Or, si l'on connaissait la composition de la molécule

[1]) *Wiener Sitzungsber.*, 2te Abth., t. 63, p. 399; t. 66, p. 336.

et les forces que ses éléments constituants exercent les uns sur les autres, on pourrait établir les équations différentielles du mouvement relatif de ces éléments, équations qui sont tout à fait indépendantes des forces extérieures agissant sur le gaz, lorsque celles-ci, comme nous l'admettrons, donnent à tous les éléments de la molécule une même accélération.

Si, ensuite, il était possible d'intégrer les susdites équations du mouvement, toutes les coordonnées relatives seraient trouvées en fonction de t. Dans les expressions ainsi obtenues entreraient un certain nombre de constantes, qui pourraient être déterminées si l'on connaissait, pour un seul instant, la position mutuelle et les vitesses des éléments constituants; nous nommerons ces constantes les paramètres du mouvement intramoléculaire.

Pour l'un de ces paramètres on pourra toujours prendre la somme E de l'énergie potentielle des éléments constituants et de l'énergie actuelle de leur mouvement relatif par rapport au centre de gravité commun; quant aux autres paramètres, nous les désignerons par $p_1, p_2, \ldots p_k$. Il est clair que si, à un moment quelconque t, les quantités ξ, η, ζ, E, $p_1, \ldots p_k$ sont connues pour une molécule, l'état de mouvement de celle-ci est entièrement déterminé; dans ce qui va suivre, ce sont donc ces quantités que nous emploierons pour le but en question.

Tant que chaque molécule se meut en dehors de l'influence des autres, les seules quantités ξ, η, ζ varient par l'effet des forces extérieures, tandis que E, $p_1, \ldots p_k$ restent constantes. Mais il n'en est plus ainsi quand une molécule A se rapproche assez d'une autre pour qu'une action réciproque s'exerce entre elles. Nous admettrons qu'au bout d'un temps très court les deux molécules ont échappé à cette influence mutuelle, sans avoir eu à subir une séparation ou un échange de leurs éléments constituants. Après cette rencontre ou ce choc, l'état de mouvement de la molécule A peut de nouveau être représenté de la même manière qu'avant la rencontre; seulement, $E, p_1 \ldots p_k$ auront pris de nouvelles valeurs, tout aussi bien que ξ, η, ζ.

Or, le résultat de ces rencontres doit être que les molécules

qui se trouvent dans une portion déterminée de l'espace auront des états de mouvement très différents, répartis entre elles suivant une certaine loi. Si l'état du gaz est variable d'un point à l'autre et d'un instant à l'autre, la forme de cette loi dépendra aussi du lieu et du temps. Mathématiquement, cela peut s'exprimer de la manière suivante. Soit dl un élément de volume situé au point (x, y, z), et admettons que cet élément contienne encore un grand nombre de molécules. Parmi toutes celles qui s'y trouvent au temps t, prenons un groupe déterminé, à savoir celles pour lesquelles les composantes de la vitesse du centre de gravité et les paramètres du mouvement interne sont respectivement compris entre

$$\xi \text{ et } \xi + d\xi, \eta \text{ et } \eta + d\eta, \zeta \text{ et } \zeta + d\zeta, E \text{ et } E + dE,$$
$$p_1 \text{ et } p_1 + dp_1, \ldots p_k \text{ et } p_k + dp_k;$$

le nombre de ces molécules peut alors être représenté par

$$F(\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \ldots p_k, x, y, z, t)\, d\lambda\, dl, \quad \ldots . \quad (1)$$

en posant

$$d\lambda = d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dE\, dp_1 \ldots dp_k.$$

Si la fonction F, que nous venons d'introduire, est déterminée, on connaît complètement l'état du gaz et on peut calculer toutes les quantités qui s'y rattachent. Veut-on trouver, par exemple, le nombre total des molécules contenues dans l'élément dl, on devra intégrer l'expression (1) par rapport à $\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \ldots p_k$, pour toutes les valeurs que ces variables peuvent présenter. En indiquant cette opération par un seul signe d'intégration, on aura donc pour le nombre cherché: $N\,dl$, si

$$N = \int F\, d\lambda.$$

Par une semblable intégration on peut trouver aussi, pour toutes les molécules comprises dans dl, la valeur moyenne d'une

quantité quelconque φ dépendant de l'état de mouvement, c'est-à-dire, de ξ, η, ζ, E, p_1 . . . p_k. Cette valeur est:

$$\frac{1}{N}\int F\varphi\, d\lambda.$$

Si l'on calcule de cette manière les valeurs moyennes u, v, w de ξ, η, ζ, on obtient les composantes de la vitesse que l'élément dl paraît posséder dans son ensemble et que nous pouvons appeler la *vitesse hydrodynamique*.

Pour trouver maintenant un moyen de déterminer la fonction F, considérons à un moment donné le groupe de molécules dont (1) est le nombre, et suivons-les dans leur trajet pendant un temps infiniment court dt. Ne tenons d'abord aucun compte des chocs. La vitesse (ξ, η, ζ) pouvant être regardée comme la même pour toutes les molécules dont il s'agit, nous pouvons nous représenter que l'élément dl se déplace simplement avec cette vitesse, en conservant sa forme et sa grandeur, et en emportant avec lui le groupe de molécules. A la fin du temps dt, ces molécules se trouveront donc dans l'élément dl au point ($x+\xi\, dt$, $y+\eta\, dt$, $z+\zeta\, dt$). Les paramètres du mouvement intramoléculaire n'ont pas changé et sont donc toujours compris entre les limites assignées ci-dessus.

Mais, en vertu des forces extérieures, les composantes de la vitesse des centres de gravité des molécules ont subi certains accroissements, que nous pouvons supposer égaux pour toutes les molécules considérées. En nous bornant au cas où les forces dépendent d'une fonction potentielle, nous pouvons représenter les accroissements en question par $\frac{\partial\psi}{\partial x}dt$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}dt$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}dt$, de sorte qu'à la fin du temps dt les vitesses se trouveront entre les limites:

$$\begin{aligned}
&\xi+\frac{\partial\psi}{\partial x}dt \text{ et } \xi+\frac{\partial\psi}{\partial x}dt+d\xi,\\
&\eta+\frac{\partial\psi}{\partial y}dt \;\;\text{»}\;\; \eta+\frac{\partial\psi}{\partial y}dt+d\eta,\\
&\zeta+\frac{\partial\psi}{\partial z}dt \;\;\text{»}\;\; \zeta+\frac{\partial\psi}{\partial z}dt+d\zeta.
\end{aligned}$$

Voyons maintenant quel sera l'effet des chocs. Durant le temps dt, quelques molécules du groupe considéré rencontreront d'autres molécules, et par suite de cette rencontre elles prendront un nouvel état de mouvement, c'est-à-dire qu'elles sortiront du groupe. En revanche, d'autres molécules, qui primitivement n'appartenaient pas au groupe, acquerront, à la suite de chocs, des mouvements tels que dorénavant elles en feront partie. Or, comme le nombre A des molécules qui abandonnent le groupe ne sera pas, en général, égal au nombre B de celles qui y entrent, à la fin du temps dt nombre des molécules douées de l'état de mouvement considéré, dans l'élement dl, dépassera de $B—A$ le nombre indiqué en (1).

Si la fonction F et l'action réciproque des molécules étaient connues, on pourrait calculer la quantité A. A la rigueur, il y aurait lieu de tenir compte, dans ce calcul, de ce que, durant le temps dt, l'élément dl, qui contient les molécules, change continuellement d'entourage, et aussi de ce que les vitesses des molécules du groupe subissent des modifications. Attendu toutefois que la quantité A, de même que dt, est infiniment petite, et que le changement d'entourage de dl et l'accroissement des vitesses sont l'un et l'autre des infiniment petits du même ordre, il est évident qu'on pourra négliger, comme infiniment petit du second ordre, l'influence de ces deux circonstances sur A. En d'autres termes, pour calculer A, on peut se figurer une masse gazeuse P sur laquelle n'agit aucune force extérieure, et dont l'état est partout le même que dans le gaz considéré, au point (x, y, z) et au temps t; A est alors, dans un élément fixe dl de cette masse gazeuse, le nombre des chocs où l'une des molécules avait, avant le choc, un état de mouvement compris entre ξ et $\xi + d\xi$, etc. Naturellement, A est proportionnel à dl, à $d\lambda$ et à dt; en posant $A = a\,dl\,d\lambda\,dt$, $a\,d\lambda\,dt$ est le nombre des rencontres, de la susdite espèce, qui auraient lieu dans l'unité de volume de P. Si l'on représente de même par $b\,d\lambda\,dt$ le nombre des chocs dans lesquels une des molécules acquiert, après la rencontre, l'état de mouvement ci-dessus spécifié, on a $B = b\,dl\,d\lambda\,dt$.

De ce qui précède, il suit que

$$F(\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \ldots p_k, x, y, z, t)\, d\lambda\, dl + (b - a)\, d\lambda\, dl\, dt \ldots (2)$$

sera le nombre des molécules qui, au temps $t + dt$, se trouvent dans l'élément dl au point $(x + \xi\, dt, y + \eta\, dt, z + \zeta\, dt)$, et pour lesquelles les quantités qui déterminent l'état de mouvement sont respectivement comprises entre:

$$\xi + \frac{\partial \psi}{\partial x} dt \text{ et } \xi + \frac{\partial \psi}{\partial x} dt + d\xi, \text{ etc.}$$

$$E \text{ et } E + dE, \text{ etc.}$$

D'un autre côté, on devra obtenir le nombre de ces molécules en faisant subir à ξ, η, ζ, x, y, z, t, dans l'expression (1), les accroissements $\frac{\partial \psi}{\partial x} dt$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} dt$, $\frac{\partial \psi}{\partial z} dt$, ξdt, ηdt, ζdt, dt. L'expression ainsi modifiée étant égalée à (2), on trouve:

$$b - a = \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial z}\zeta + \frac{\partial F}{\partial t} \text{ (I).}$$

Comme, aussitôt la fonction F connue, il serait possible, par la considération des chocs, de trouver a et b en fonction de $\xi, \ldots p_k$, x, y, z, t, on peut regarder (I) comme une équation propre à déterminer F. C'est l'équation fondamentale pour tous les problèmes qui ont rapport au mouvement des molécules gazeuses [1]).

§ 2. Les équations du mouvement sous leur forme générale.

De l'équation fondamentale (I) on peut, sans faire d'hypothèses particulières sur l'action réciproque des molécules, déduire plu-

[1]) L'équation (I) équivaut à l'équation (44) de M. Boltzmann (*Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen*, dans: *Wiener Sitzungsber.*, 2te Abth., Bd. 66).

sieurs conséquences. Vu la signification sus-indiquée de $a\,d\lambda\,dt$, il est évident qu'en intégrant cette quantité par rapport à $\xi, \ldots p_k$ on doit obtenir le nombre total des molécules qui, dans l'unité de volume de la masse gazeuse P, subissent un choc durant le temps dt. Mais le même nombre s'obtient aussi par l'intégration de $b\,d\lambda\,dt$; on a donc:

$$\int (b-a)\,d\lambda = 0.$$

Il suit en outre, du principe du mouvement du centre de gravité, que si, pour tous les chocs qui durant le temps dt ont lieu dans l'unité d'espace de P, on prend d'abord la somme des quantités de mouvement des molécules dans la direction de l'axe des x *avant* les chocs, puis cette même somme *après* que les molécules ont subi le choc, on doit trouver des résultats égaux. En nommant m la masse d'une molécule, la première somme est $m\,dt\int a\,\xi\,d\lambda$, la seconde $m\,dt\int b\,\xi\,d\lambda$, de sorte qu'on doit avoir:

$$\int (b-a)\,\xi\,d\lambda = 0,$$

et de meme, naturellement:

$$\int (b-a)\,\eta\,d\lambda = \int (b-a)\,\zeta\,d\lambda = 0.$$

Enfin, une conséquence analogue se déduit encore du principe de la conservation de l'énergie. Si l'on pose $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2$, l'énergie d'une molécule est $\frac{1}{2}\,m\,r^2 + E$, et on a l'équation:

$$\int (b-a)\left(\frac{1}{2}\,m\,r^2 + E\right) d\lambda = 0.$$

Ainsi, en multipliant le second membre de l'équation (I) par une des quantités $d\lambda$, $\xi\,d\lambda$, $\eta\,d\lambda$, $\zeta\,d\lambda$, $(\frac{1}{2}\,m\,r^2 + E)\,d\lambda$,

puis intégrant par rapport à ξ, η, $\zeta \ldots p_k$, on doit obtenir 0.

Pour donner aux cinq équations qui résultent de là une forme plus concise, nous introduirons, outre les vitesses hydrodynamiques u, v, w, les quantités suivantes:

$$\left.\begin{array}{c}
\int F\xi^2\, d\lambda = P_x, \quad \int F\eta^2\, d\lambda = P_y, \quad \int F\zeta^2\, d\lambda = P_z; \\
\int F\xi\eta\, d\lambda = Q_{x,y}, \int F\eta\zeta\, d\lambda = Q_{y,z}, \int F\zeta\xi\, d\lambda = Q_{z,x}; \\
\int F\left(\frac{1}{2}mr^2 + E\right) d\lambda = R; \\
\int F\xi\left(\frac{1}{2}mr^2 + E\right) d\lambda = S_x, \int F\eta\left(\frac{1}{2}mr^2 + E\right) d\lambda = S_y, \\
\int F\zeta\left(\frac{1}{2}mr^2 + E\right) d\lambda = S_z.
\end{array}\right\} \ldots (3)$$

Pour qu'à l'aide de ces quantités — qui naturellement sont encore des fonctions de x, y, z, t, — on puisse écrire les équations, il ne faut pas perdre de vue, quand il s'agit des termes qui contiennent une des expressions $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$, que, dans l'intégration par rapport à $\xi, \ldots p_k$, les quantités x, y, z, t doivent être regardées comme des paramètres constants, de sorte qu'on a, par exemple:

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} \xi^2\, d\lambda = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int F\xi^2\, d\lambda\right] = \frac{\partial P_x}{\partial x}.$$

La valeur, au contraire, des intégrales qui contiennent $\frac{\partial F}{\partial \xi}$, $\frac{\partial F}{\partial \eta}$ ou $\frac{\partial F}{\partial \zeta}$ peut être trouvée au moyen de l'intégration par parties, en observant d'ailleurs que F disparaît pour des valeurs infiniment grandes de ξ, η ou ζ; en effet, les molécules à très grande vitesse seront tout au moins très rares. On aura donc, par exemple:

$$\int \frac{\partial F}{\partial \xi}\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda = -\int F\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda = -mNu.$$

Les cinq équations cherchées prennent, en définitive, la forme suivante:

$$\frac{\partial (Nu)}{\partial x}+\frac{\partial (Nv)}{\partial y}+\frac{\partial (Nw)}{\partial z}+\frac{\partial N}{\partial t}=0, \quad \dots\dots (a_1)$$

$$\left.\begin{aligned}
-N\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_{x,y}}{\partial y}+\frac{\partial Q_{z,x}}{\partial z}+\frac{\partial (Nu)}{\partial t}&=0,\\
-N\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial Q_{x,y}}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial Q_{y,z}}{\partial z}+\frac{\partial (Nv)}{\partial t}&=0,\\
-N\frac{\partial \psi}{\partial z}+\frac{\partial Q_{x,z}}{\partial x}+\frac{\partial Q_{y,z}}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}+\frac{\partial (Nw)}{\partial t}&=0,
\end{aligned}\right\} \dots (b_1)$$

$$-mN\left(u\frac{\partial \psi}{\partial x}+v\frac{\partial \psi}{\partial y}+w\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial S_x}{\partial x}+\frac{\partial S_y}{\partial y}+\frac{\partial S_z}{\partial z}+\frac{\partial R}{\partial t}=0, \dots (c_1)$$

Chacun des termes de ces équations a une signification très simple, de sorte que ces équations auraient pu être établies directement. C'est ainsi, par exemple, que (c_1) exprime comment l'énergie varie à l'intérieur d'un élément de volume stationnaire $dx\,dy\,dz$. Cette énergie est $R\,dx\,dy\,dz$, et elle peut changer seulement à raison de l'influence des forces extérieures, représentée par le terme $-mN\left(u\frac{\partial \psi}{\partial x}+v\frac{\partial \psi}{\partial y}+w\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)$, et à raison de l'entrée et de la sortie d'une certaine quantité d'énergie par les faces latérales de l'élément, quantité que fournissent les termes $\frac{\partial S_x}{\partial x}$, $\frac{\partial S_y}{\partial y}$ et $\frac{\partial S_z}{\partial z}$ de l'équation (c_1).

De même, (a_1) et (b_1) donnent la variation du nombre des molécules et de la quantité de mouvement à l'intérieur d'un élément de volume stationnaire.

Quelques transformations fort simples suffisent pour montrer que l'équation (a_1) concorde avec l'équation bien connue de la

continuité, et que les relations (b_1) correspondent aux équations qui, dans la théorie générale des mouvements intérieurs d'un corps, expriment l'accélération d'un élément en fonction des forces extérieures et des pressions ou tensions normales ou tangentielles. En étudiant de plus près cette correspondance, on reconnaît, par exemple, que les composantes de la pression sur un plan perpendiculaire à l'axe des x, qui entrent dans la théorie susdite, sont analogues aux quantités $m(P_x - Nu^2)$, $m(Q_{x,y} - Nuv)$, $m(Q_{z,x} - Nwu)$.

§ 3. Première approximation, dans laquelle on néglige le frottement interne et la conductibilité calorifique.

Pour rendre les équations (a_1), (b_1) et (c_1) propres à la solution des problèmes sur le mouvement des gaz, nous devons chercher la valeur des quantités P_x, etc. A cet effet, il est nécessaire de considérer de plus près la fonction F.

Le cas le plus simple qui puisse se présenter est celui d'une masse gazeuse homogène, sur laquelle n'agit aucune force extérieure et qui se trouve dans un état stationnaire, où l'ensemble de la masse est en repos. La fonction F sera alors évidemment indépendante de x, y, z. Elle ne renfermera pas non plus t, si nous faisons une hypothèse déterminée. Nous admettrons, en effet, que, si à partir d'un moment quelconque les chocs cessaient, chaque molécule étant dorénavant abandonnée à elle-même, l'état resterait stationnaire [1]); en d'autres termes, que

[1]) Ceci exige une explication. Chaque molécule se trouvant continuellement amenée, par son mouvement interne, dans un autre état, ou, si l'on veut, dans une autre phase de mouvement, il pourrait très bien se faire que l'état du gaz fût modifié par les mouvements internes. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, il faut qu'à chaque instant il y ait un grand nombre de molécules possédant des mouvements internes tout à fait semblables, mais arrivées aux phases les plus diverses, avec cette condition que, lorsque quelques-unes de ces molécules passent de la phase A dans une autre, un même nombre de molécules entrent dans la phase A.

les chocs ne sont pas nécessaires à l'entretien de l'état stationnaire (une fois établi), que, au contraire, ils ne changent absolument rien à l'état. Or, s'il n'y avait pas de chocs, F ne varierait pas avec le temps, et il doit donc en être de même lorsque des chocs s'opèrent.

La détermination de cette fonction F, indépendante de x, y, z, t, a occupé M. Maxwell et M. Boltzmann. Nous ne ferons toutefois pas usage de la forme qu'ils ont trouvée pour cette fonction. Remarquons seulement que F, comme l'a montré M. Boltzmann, est déterminée sans la moindre équivoque lorsqu'on connaît la densité et la température, autrement dit, lorsque sont donnés le nombre N de molécules dans l'unité de volume et la moyenne h du carré de la vitesse. Ces deux quantités doivent donc entrer dans F en qualité de paramètres, la première naturellement à l'état de facteur; de sorte que nous pouvons poser:

$$F = N F_0 (\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \ldots p_k, h).$$

On a de plus:

$$\int F_0 d\lambda = 1, \int F_0 \xi \, d\lambda = \int F_0 \eta d\lambda = \int F_0 \zeta d\lambda = 0, \int F_0 r^2 d\lambda = h \, .. (4).$$

Dans la forme de la fonction F_0 doit être exprimée, bien entendu, la propriété que, à l'état stationnaire ici considéré, les molécules se meuvent de la même manière suivant toutes les directions, et aussi que, pour une direction déterminée du mouvement de la molécule, les mouvements intramoléculaires s'opèrent de la même manière tout autour de cette direction. Il ne s'ensuit pas, toutefois, que F_0 ne dépendra, outre de E, $p_1 \ldots p_k$, que de r. Car, s'il en était ainsi, il y aurait, pour deux directions de mouvement différentes, un nombre égal de molécules animées d'un même mouvement interne par *rapport aux axes des coordonnées* (puisque les coordonnées relatives d'une molécule par rapport à son centre de gravité, déterminées par E, $p_1 \ldots p_k$, ont été prises relativement aux axes des coordonnées fixés une fois pour toutes).

Or, il n'est nullement nécessaire qu'il en soit ainsi; tout ce que nous pouvons affirmer, c'est que, pour deux directions de mouvement différentes, il y a un nombre égal de molécules animées d'un même mouvement interne, *déterminé chaque fois par rapport à la direction du mouvement de la molécule.*

Si, pour déterminer le mouvement interne d'une molécule, nous avions pris un système de coordonnées ayant une position déterminée et toujours la même relativement à la direction du mouvement de la molécule, F_0 n'aurait dépendu, outre de E, $p_1 \ldots p_k$, que de r. Mais alors nous aurions eu l'inconvénient que, à chaque changement apporté dans la direction du mouvement par l'action des forces extérieures, le système de coordonnées de la molécule aurait aussi pris une autre position. De plus, en opérant ainsi, il nous aurait été difficile d'assigner la forme de F dans le cas où le gaz n'est pas en repos.

Au contraire, avec la méthode que nous avons choisie pour déterminer le mouvement interne, on peut immédiatement indiquer ce que devient la fonction F lorsque le gaz est entraîné dans un mouvement d'ensemble, avec une vitesse dont les composantes u, v, w ont *partout les mêmes valeurs*. En effet, les paramètres du mouvement interne étant indépendants de cette vitesse, on aura dans ce cas:

$$F = N F_0 (\xi - u,\ \eta - v,\ \zeta - w,\ E,\ p_1 \ldots p_k,\ h); \ldots (5).$$

h est ici la valeur moyenne du carré de la vitesse, abstraction faite de la vitesse (u, v, w); le vrai carré moyen de la vitesse est $u^2 + v^2 + w^2 + h$. L'expression (5), aussi bien que celle qui représente F dans le cas du repos, annule les deux membres de l'équation fondamentale.

Ce cas le plus simple mis de côté, voici comment le problème peut être envisagé pour tout autre état de mouvement. En chaque point et à chaque instant, les quantités N, u, v, w auront des valeurs déterminées, et nous pouvons choisir h de telle sorte que $u^2 + v^2 + w^2 + h$ soit le carré moyen de la vitesse des molécules au voisinage de ce point. Les quantités

N, u, v, w, h sont alors, en général, des fonctions de x, y, z, t. Si elles étaient constantes, l'équation (5) pourrait être appliquée; maintenant, il n'en est plus ainsi. Nous posons donc:

$$F = NF_0(\xi - u, \eta - v, \zeta - w, E, p_1, .. p_k, h) + f(\xi, \eta, \zeta, E, p_1, .. p_k, x, y, z, t) \quad (6)$$

où il faut tâcher de déterminer f. Pour cela, nous avons en premier lieu l'équation fondamentale, et en second lieu les relations suivantes, qui résultent immédiatement de ce qui a été dit plus haut:

$$\int f\, d\lambda = \int f \xi\, d\lambda = \int f \eta\, d\lambda = \int f \zeta\, d\lambda = \int f r^2\, d\lambda = 0 \; .. (7).$$

Nous supposerons maintenant, dans la suite de notre étude, que les conditions suivantes sont remplies:

α. La différence de l'état du gaz (c'est-à-dire de la fonction F), en deux points distants l'un de l'autre d'une longueur égale au trajet moyen ϱ d'une molécule entre deux chocs successifs, est très petite, comparée à l'écart total entre cet état et l'état d'équilibre.

β. Il en est de même du changement que l'état éprouve, en un même point, durant le temps qui s'écoule entre deux chocs successifs d'une molécule.

γ. Le changement de vitesse qu'une molécule éprouve entre deux chocs successifs, par l'effet des forces extérieures, est très petit comparé à la vitesse même.

Pour que les conditions α et β soient satisfaites dans le mouvement sonore libre, il faut que la longueur d'onde soit très grande par rapport au trajet libre moyen ϱ des molécules.

La condition γ est évidemment satisfaite si la seule force extérieure est la pesanteur.

De α, β et γ on peut déduire que f, dans l'équation (6), est très petite comparée à NF_0. Pour le montrer, considérons la grandeur des termes qui entrent dans l'équation fondamentale.

Examinons d'abord le premier membre. Soient a_0 et b_0 les valeurs (égales) que prennent a et b quand on prend pour F la valeur

(5), et soient $a_0 + a_1$, $b_0 + b_1$ les valeurs qui correspondent à (6); le premier membre de l'équation fondamentale devient alors $b_1 - a_1$.

Si le gaz se trouve dans l'état (5), les molécules dont l'état est compris entre les limites sus-indiquées, et dont le nombre (dans l'unité de volume) est $N F_0\, d\lambda$, parcourront, à partir d'un moment donné, un certain trajet moyen s avant de rencontrer une autre molécule. Par un calcul connu, on trouve que le nombre des molécules du groupe en question, qui subissent déjà un choc durant le temps dt, est représenté par $\frac{r}{s} N F_0 d\lambda dt$. On a donc $a_0 = \frac{r}{s} N F_0$. Or, r étant du même ordre que la vitesse moyenne V' du mouvement moléculaire, et s du même ordre que la quantité ϱ nommée dans la condition α, il en résulte que a_0 est de l'ordre $\frac{V'}{\varrho}\ N F_0$.

Ensuite, a_1 représente l'accroissement de a lorsque l'état du gaz subit le changement indiqué par f dans l'équation (6). Par conséquent, a_1 est de l'ordre $a_0 \frac{f}{NF_0}$, ou de l'ordre $\frac{V'}{\varrho} f$, et il en sera de même pour b_1. [1])

Dans le second membre de l'équation fondamentale entrent d'abord quelques termes provenant de f dans l'éq. (6).

Mais, de ce qui vient d'être trouvé au sujet de a_1 et b_1, il suit qu'en vertu de α les termes $\frac{\partial f}{\partial x} \xi$, $\frac{\partial f}{\partial y} \eta$, $\frac{\partial f}{\partial z} \zeta$, en vertu

[1]) Comme M. Korteweg me l'a fait remarquer, cette conclusion n'est pas vraie dans tous les cas. On peut concevoir une telle constitution des molécules gazeuses que leur mouvement interne n'exerce qu'une très-faible influence sur l'effet des chocs et n'en soit, en revanche, que très légèrement changé. Si alors f représentait un dérangement de l'état NF_0 consistant principalement en un changement des mouvements internes, a ne serait presque pas modifié par f. Dans ce cas, les lois de la propagation du son différeraient de celles qu'on trouve déduites dans ce Mémoire. Je ne crois pas cependant que quelque fait aujourd'hui connu prouve l'existence dans la nature de ce cas spécial.

de β le terme $\frac{\partial f}{\partial t}$, et en vertu de γ les termes $\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z}$ peuvent être négligés par rapport à a_1 et b_1. Pour le reconnaître en ce qui concerne les trois termes nommés en dernier lieu, il suffit de remarquer que les quantités $\frac{\partial f}{\partial \xi}$, $\frac{\partial f}{\partial \eta}$, $\frac{\partial f}{\partial \zeta}$ seront en général de l'ordre $\frac{f}{V'}$.

Nous n'avons donc à conserver au second membre de l'équation (I) que les termes provenant de NF_0 dans (6). L'équation devient ainsi:

$$b_1 - a_1 = N\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + N\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\frac{d\psi}{\partial y} + N\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z} +$$

$$+ \frac{\partial (NF_0)}{\partial x}\xi + \frac{\partial (NF_0)}{\partial y}\eta + \frac{\partial (NF_0)}{\partial z}\zeta + \frac{\partial (NF_0)}{\partial t} \quad \text{(II)}.$$

où F_0 désigne toujours la fonction $F_0(\xi - u, \ldots)$.

C'est cette équation qui doit servir à la détermination de f. Or, en vertu de α, β, γ, le second membre n'a qu'une petite valeur, et il en est de même de la différence de a_1 et b_1. Si l'on pouvait conclure de là que les quantités a_1 et b_1 sont elles-mêmes très-petites, on pourrait en affirmer autant de f. Évidemment il n'est pas permis de tirer cette conclusion de la seule équation (II). Mais il faut remarquer que la fonction f doit satisfaire aussi aux conditions (7). De plus, lorsque le gaz est en équilibre et soustrait à toute action étrangère, l'état indiqué par (5) est le seul possible. Il s'ensuit que, lorsque le second membre de (II) est égal à 0, $f = 0$ est la seule solution de (II) et de (7), ce qui amène les équations $a_1 = 0$, $b_1 = 0$. Les quantités a_1 et b_1 s'annulant ainsi *chacune séparément* en même temps que le second membre, une petite valeur de ce dernier donnera de pareilles valeurs pour a_1 et b_1. Si l'on exprime ce fait en disant

que ces trois quantités sont du même ordre, et si l'on se souvient que a_1 et b_1 sont de l'ordre $\frac{V'}{\varrho}f$, on trouve que la fonction f sera elle-même de l'ordre:

$$\frac{\varrho}{V'}\left\{ N\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + N\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y} + N\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial (NF_0)}{\partial x}\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial (NF_0)}{\partial y}\eta + \frac{\partial (NF_0)}{\partial z}\zeta + \frac{\partial (NF_0)}{\partial t}\right\}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

c'est-à-dire, en vertu de α, β et γ, qu'elle sera très petite par rapport à NF_0, ainsi que nous voulions le démontrer.

Regardons donc dans la suite f comme *infiniment petite* par rapport à NF_0; les quantités a_1 et b_1 deviennent alors aussi infiniment petites par rapport à a_0 et b_0. D'après cela, si f est composée de différentes parties, la valeur que prend le premier membre de l'équation fondamentale sera la somme des valeurs qu'il acquerrait si l'on prenait pour f successivement chacune des parties en question. Il en résulte immédiatement que si le second membre de (II) est composé de différentes parties, et qu'on réussisse à trouver pour f des valeurs qui rendent la différence $b_1 - a_1$ égale à chacune de ces parties et qui en même temps satisfont à (7), la somme de ces valeurs sera la vraie valeur de f. Plus loin, au § 5, nous ferons une application répétée de ce théorème.

Pour un cas particulier, nous allons dès à présent considérer la fonction f de plus près. Supposons le gaz soumis à l'action de la pesanteur et compris entre deux parois horizontales fixes, avec lesquelles il ne peut opérer aucun échange de chaleur. Evidemment il peut alors s'établir un état stationnaire, où u, v, w seront partout nuls, et où, l'axe des x étant dirigé verticalement vers le bas, N et peut-être aussi h dépendront de x.

Dans ce cas, le premier terme de (6) est $NF_0(\xi, \eta, \zeta, E, \ldots h)$, et l'équation (II) devient:

$$b_1 - a_1 = g N \frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \frac{dN}{dx} F_0 \xi + N \frac{dh}{dx} \frac{\partial F_0}{\partial h} \xi, \quad . \ . \ (9)$$

où g a la signification ordinaire.

Or, il n'est pas difficile de montrer que la valeur de f, qui résulte de (9) et de (7), ne peut fournir un contingent que pour l'intégrale

$$S_x = \int F \xi \left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda,$$

mais non pour les autres quantités P_x, P_y, P_z, $Q_{x,y}$, $Q_{y,z}$, $Q_{x,z}$, R, S_y, S_z.

Pour le prouver, nous ferons usage du moyen suivant, qui pourra nous servir aussi plus tard, dans des questions analogues.

Soit une masse gazeuse soumise à l'action de forces extérieures et dans laquelle s'opèrent des mouvements tout à fait arbitraires. Nous pouvons alors nous figurer une seconde masse gazeuse, qui soit à chaque instant l'image de la première par rapport à un plan fixe; les mouvements nécessaires à cet effet, dans cette seconde masse, pourront réellement avoir lieu, au moins si les éléments constituants n'exercent entre eux que des forces centrales et si les forces extérieures appliquées au second gaz sont exactement les images de celles qui agissent sur le premier. En supposant que le plan par rapport auquel a été prise l'image soit parallèle au plan y, z, et que pour cette image on ait conservé aux axes positifs la même direction que pour le gaz primitif, il résulte de la signification des quantités N, v, w, P_x, P_y, P_z, $Q_{y,z}$, R, S_y, S_z que, en deux points correspondants des deux masses gazeuses, ces quantités doivent avoir la même valeur et le même signe, tandis que u, $Q_{x,y}$, $Q_{x,z}$, S_x, au contraire, auront bien en ces points des valeurs égales, mais des signes opposés.

Considérons de cette manière l'image de la masse gazeuse dont nous avions commencé à nous occuper plus haut. En un point quelconque de l'image, N et évidemment aussi la fonction F_0 seront les mêmes qu'au point correspondant de la

masse gazeuse primitive, mais $\frac{dN}{dx}$ et $\frac{dh}{dx}$ auront en ces deux points des signes opposés. La constante g devra aussi, pour le second gaz, être remplacée par $-g$, puisque la force extérieure y doit être dirigée vers le haut. Dans l'image, le second membre de (9) a donc justement le signe opposé à celui qu'il possède dans le gaz primitif, et il devra par conséquent en être de même de f et des contingents que f fournit pour P_x, etc. Ces contingents doivent donc être nuls pour toutes les quantités qui, comme P_x, doivent avoir le même signe dans les deux gaz, de sorte qu'il ne reste que les quantités u, $Q_{x,y}$, $Q_{x,z}$, S_x. Mais la première est exclue par (7), et quant à $Q_{x,y}$ et $Q_{x,z}$, pour prouver que f ne peut rien leur fournir, il suffit de comparer le gaz avec son image par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe des y ou à celui des z. En définitive, il ne reste donc que le contingent pour S_x.

Dans le calcul des autres quantités P_x etc., on peut maintenant se borner au premier terme de (6), qui est ici $NF_0(\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \ldots p_k, h)$. Comme on a évidemment $\int F_0 \xi^2 \, d\lambda = \int F_0 \eta^2 \, d\lambda = \int F_0 \zeta^2 \, d\lambda$, chacune de ces quantités devient $= \frac{1}{3}\int F_0 r^2 \, d\lambda = \frac{1}{3} h$, et par conséquent $P_x = P_y = P_z = \frac{1}{3} Nh$. $Q_{x,y}$, $Q_{y,z}$, $Q_{z,x}$ deviennent 0, ainsi qu'il résulte de la considération des images, et les équations du mouvement donnent:

$$-Ng + \frac{1}{3}\frac{\partial (Nh)}{\partial x} = 0,$$

$$S_x = \text{const.}$$

Mais, pour que l'état soit réellement stationnaire, sans que le gaz enlève de la chaleur à l'une des parois et en cède à l'autre, il faut que la quantité S_x soit non seulement constante, mais nulle, car NS_x est l'excès de l'énergie qui, dans l'unité de temps, traverse l'unité de surface d'un plan horizontal quelconque de haut en bas, sur celle qui la traverse de bas en haut. M. Maxwell et M. Boltzmann ont montré que, dans cet état

stationnaire, la température doit être la même à toute hauteur. En faisant h constant, on a:

$$-Ng + \frac{1}{3} h \frac{\partial N}{\partial x} = 0,$$

$$b_1 - a_1 = Ng \left(\frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \frac{3}{h} \xi F_0 \right),$$

et le second membre de cette équation devient réellement $= 0$ (et de même f et S_x) dès que la fonction F_0 a la forme qu'ont trouvée pour elle les deux savants qui viennent d'être nommés.

D'ailleurs, indépendamment de la forme de F_0, nous pouvons établir, à la seule condition d'admettre l'exactitude de la seconde loi de la théorie mécanique de la chaleur, que, dans l'état stationnaire d'un gaz sur lequel agit la pesanteur, la température doit être la même à toute hauteur. Ceci reconnu, il s'ensuit immédiatement que la valeur de f, qui répond à la dernière équation, qu'elle soit $= 0$ ou non, ne peut fournir un contingent pour S_x, — donc pour aucune des quantités P_x, etc.

Tout comme le cas qui vient d'être considéré, on peut traiter celui où une force constante agit sur le gaz dans la direction de l'axe des y ou des z. On arrive ainsi à ce résultat que, aussitôt qu'au second membre de (II) une des quantités $\frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \frac{3}{h} F_0 \xi$, $\frac{\partial F_0}{\partial \eta} + \frac{3}{h} F_0 \eta$, $\frac{\partial F_0}{\partial \zeta} + \frac{3}{h} F_0 \zeta$ apparaît multipliée par un facteur constant, on peut la négliger entièrement dans les considérations ultérieures. Cette remarque nous sera utile dans la suite.

De ce qui précède, on peut encore déduire que, même dans le cas où des forces extérieures quelconques agissent sur un gaz, à la seule condition que ces forces dépendent d'une fonction potentielle, un état stationnaire à température partout égale est possible, et qu'alors aussi f ne fournit aucun contingent pour une des quantités P_x, etc. La relation entre la densité et les coordonnées est alors déterminée par:

$$N = \text{const.}\, e^{\frac{3}{h}\psi}.$$

Revenons maintenant au cas le plus général du mouvement d'un gaz. En supposant que les conditions α, β, γ sont remplies, nous avons déjà trouvé dans l'expression (8) de quel ordre est la fonction f. Nous pouvons maintenant ajouter encore qu'il n'y a pas à s'occuper de la partie de f qui correspond à l'état d'équilibre du gaz, mais seulement de la partie qui est due aux écarts de cet état; en effet, comme nous venons de le montrer, la première partie est sans influence sur les quantités P_x, etc. En désignant donc par $(NF_0)_e$ la valeur de la fonction NF_0 pour l'équilibre, et posant $NF_0 - (NF_0)_e = \chi$, la fonction f, en tant qu'il y a lieu d'en tenir compte, sera de l'ordre

$$\frac{\varrho}{V'}\left\{\frac{\partial\chi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\chi}{\partial x}\xi + \frac{\partial\chi}{\partial y}\eta + \frac{\partial\chi}{\partial z}\zeta + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right\},$$

par conséquent, en vertu de α, β, γ, très petite par rapport à χ, c'est-à-dire par rapport au dérangement survenu à l'état d'équilibre. Pour une première approximation, nous pourrons donc négliger f dans l'équation (6), et par conséquent admettre, dans le calcul des quantités P_x etc., que l'état en un point est le même que si, dans toute la masse gazeuse et d'une manière persistante, u, v, w, N, h avaient les mêmes valeurs qu'en ce point. Je ferai remarquer que, pour légitimer cette manière d'agir, il fallait démontrer que f est très petite par rapport à $NF_0 - (NF_0)_e$, attendu que les valeurs des coefficients différentiels tels que $\frac{\partial P_x}{\partial x}$, etc. dépendent de cette dernière quantité. Si l'on s'était borné à faire voir que f est très petite par rapport à NF_0, il ne se serait pas ensuivi nécessairement qu'elle le fût aussi par rapport à $NF_0 - (NF_0)_e$.

Le calcul de P_x, etc., à l'aide de l'équation

$$F = NF_0(\xi - u,\ \eta - v,\ \zeta - w,\ E,\ p_1, \ldots p_k,\ h),$$

ne présente pas de difficultés. En introduisant, au lieu de ξ, η, ζ, les quantités $\xi-u$, $\eta-v$, $\zeta-w$ comme nouvelles variables, et en tenant compte des relations (4), on trouve d'abord

$$P_x = \frac{1}{3} N h + N u^2, P_y = \frac{1}{3} N h + N v^2, P_z = \frac{1}{3} N h + N w^2,$$

$$Q_{x,y} = N u v, Q_{y,z} = N v w, Q_{z,x} = N w u.$$

Ensuite, on a:

$$R = \frac{1}{2} m N (u^2 + v^2 + w^2) + N \int F_0 (\xi, \eta, \zeta, E \ldots) \left(\frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda.$$

Dans cette dernière intégrale, la partie $\int F_0 . \frac{1}{2} m r^2 \, d\lambda = \frac{1}{2} m h$ représente l'énergie moyenne du mouvement de translation d'une molécule ; la partie restante $\int F_0 E \, d\lambda$ est sa moyenne énergie interne. Cette dernière sera une fonction de la température, par conséquent de h; si l'on pose $\int F_0 E d\lambda = m \vartheta (h)$, $\vartheta (h)$ est l'énergie intramoléculaire pour l'unité de masse. La nature de la fonction introduite se laissera déduire d'expériences sur le changement qu'éprouve la chaleur spécifique du gaz à mesure que varie la température [1]). Si ce changement est nul, $\vartheta (h)$ est une fonction linéaire.

La valeur de R devient maintenant:

$$R = \frac{1}{2} m N (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2} m N h + m N \vartheta (h) \ldots . (10)$$

Enfin, on a:

$$S_x = N \int F_0 (\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \ldots p_k, h) (\xi + u) \left\{ \frac{1}{2} m (r^2 + 2 \xi u + 2 \eta v + \right.$$

$$\left. + 2 \zeta w + u^2 + v^2 + w^2) + E \right\} d\lambda = \frac{1}{2} m N u \left[\frac{5}{3} h + 2 \vartheta (h) + (u^2 + v^2 + w^2) \right],$$

[1]) E. Wiedemann, Pogg. *Ann.*, t. 157.

$$S_y = \frac{1}{2} m N v \left[\frac{5}{3} h + 2\vartheta(h) + (u^2 + v^2 + w^2)\right],$$

$$S_z = \frac{1}{2} m N w \left[\frac{5}{3} h + 2\vartheta(h) + (u^2 + v^2 + w^2).\right].$$

Transportant ces résultats dans (a_1), (b_1), (c_1), et faisant en outre usage de (a_1) pour réduire (b_1), et de (a_1) et (b_1) pour simplifier (c_1), on obtient les équations de mouvement suivantes:

$$\frac{\partial (Nu)}{\partial x} + \frac{\partial (Nv)}{\partial y} + \frac{\partial (Nw)}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial t} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a_2)$$

$$-N\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial (Nh)}{\partial x} + N\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0, \text{ etc.} \; . \; . \quad (b_2)$$

$$\frac{1}{3}h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}[1 + 2\vartheta'(h)]\left(u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} + w\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t}\right) = 0 \; . \quad (c_2)$$

Si l'on multiplie (a_2) et (b_2) par m, on peut, au lieu de N, introduire la densité du gaz $mN = \delta$.

Pour des dérangements infiniment petits de l'état d'équilibre, les équations se simplifient. Si dans cet état on a $\delta = \delta_0$, $h = h_0$, et dans l'état dérangé $\delta = \delta_0 (1 + s)$, on obtient, en négligeant de plus l'action des forces extérieures,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a_3)$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial (h + h_0 s)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad \frac{1}{3}\frac{\partial (h + h_0 s)}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial (h + h_0 s)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b_3)$$

$$\frac{1}{3}h_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left[1 + 2\vartheta'(h_0)\right]\frac{\partial h}{\partial t} = 0 \; . \; . \; . \quad (c_3)$$

§ 4. La propagation du son.

Il ne sera pas nécessaire de montrer en détail que les équations qui viennent d'être trouvées diffèrent seulement par la

notation de celles qu'on obtient dans la théorie ordinaire du son. Nous nous bornerons donc à faire voir comment on peut en tirer la vitesse de propagation du son. A cet effet, de (a_3) et (c_3) nous déduirons d'abord:

$$\frac{3}{2h_0}[1+2\vartheta'(h_0)]\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial s}{\partial t},$$

ou, puisque dans l'état primitif d'équilibre on avait $s=0$ et $h=h_0$,

$$\frac{3}{2h_0}[1+2\vartheta'(h_0)](h-h_0)=s.$$

Ensuite, nous pouvons éliminer u, v, w de (a_3) et (b_3), ce qui donne:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=\frac{5+6\vartheta'(h_0)}{9[1+2\vartheta'(h_0)]}h_0\Delta s.$$

Cette équation a une forme bien connue, et il en résulte immédiatement pour la vitesse de propagation:

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5+6\vartheta'(h_0)}{1+2\vartheta'(h_0)}h_0}.$$

Or, la pression p_0 dans l'état d'équilibre étant déterminée par $p_0=\frac{1}{3}\delta_0 h_0$, et un raisonnement très simple donnant la valeur $k=\frac{5+6\vartheta'(h_0)}{3[1+2\vartheta'(h_0)]}$ pour le rapport des chaleurs spécifiques du gaz à pression constante et à volume constant, le résultat obtenu concorde entièrement avec la formule

$$V=\sqrt{\frac{kp_0}{\delta_0}},$$

à laquelle conduit la théorie ordinaire du son et que l'observation confirme.

Si nous n'avions eu d'autre but que d'obtenir ce résultat, nous aurions pu dès l'origine supposer infiniment petit le dérangement de l'équilibre et faire abstraction de l'action de forces extérieures; notre recherche au § précédent en serait devenue beaucoup plus simple. Toutefois, pour arriver aux équations du mouvement (a_3), (b_3), (c_3), il n'en aurait pas moins fallu admettre que les conditions α et β (p. 16) sont remplies. Par conséquent, une solution des équations ne pourra représenter un mouvement possible que si elle satisfait à ces conditions. Ce cas se rencontre dans la propagation régulière des vibrations sonores. Mais il y a d'autres solutions des équations du mouvement qui ne satisfont pas à la condition indiquée.

Ces équations nous apprennent, par exemple, que la propagation d'une onde unique, isolée, est possible. L'équilibre n'est alors troublé que dans une couche comprise entre deux surfaces, couche qui s'étend de plus en plus, tout en conservant son épaisseur. Cette solution satisfait encore aux équations du mouvement lorsque l'onde a des limites nettement définies, c'est-à-dire lorsque, du dedans au dehors, le dérangement d'équilibre passe très rapidement, d'une valeur finie, à zéro. Il est clair, toutefois, qu'un pareil mouvement ne pourra subsister en réalité. S'il se produisait pour un instant, l'onde ne tarderait pas à perdre ses limites tranchées, par un phénomène de diffusion dont il n'a pas été tenu compte dans l'établissement des équations du mouvement. Ce phénomène, qui dans le mouvement sonore ordinaire ne se manifeste que comme influence légèrement perturbatrice, serait alors, durant un certain temps, l'action principale.

C'est d'un cas de ce genre que M. Rink s'occupe à la fin de son Mémoire [1]). On ne saurait donc s'étonner qu'il obtienne ici des résultats en contradiction avec les vues qui ont généralement cours au sujet de la propagation du son. Mais cela ne plaide nullement contre la théorie cinétique des gaz, car, dans le mouvement sonore ordinaire, la diffusion dont il s'agit n'aura qu'une faible influence.

[1]) *loc. cit.*, p. 279.

Quant à la vérité de cette assertion, nous l'avons déduite, au § précédent, de nos équations, en montrant qu'il est permis d'y négliger f. Peut-être, toutefois, ne sera-t-il pas sans utilité de la mettre encore mieux en évidence par les considérations élémentaires suivantes.

Figurons-nous que dans un espace clos, rempli de gaz, on admette du dehors un certain nombre de molécules et qu'ensuite le gaz soit abandonné à lui-même. Avant l'introduction des nouvelles molécules, le gaz se trouvait dans un état stationnaire, déterminé par la fonction F_0. La première conséquence de l'entrée des nouvelles molécules sera un dérangement de cet état. Mais, grâce aux chocs mutuels, il s'établira bientôt un nouvel état stationnaire, qui différera du premier en ce que le nombre des molécules, le carré moyen de leur vitesse et la vitesse moyenne suivant les axes des coordonnées seront modifiés. Les choses se passeraient, naturellement, d'une manière analogue, si un certain nombre de molécules sortaient de l'espace en question.

Le temps qui s'écoule avant que l'état stationnaire ne soit rétabli sera du même ordre de grandeur que le temps qui sépare deux chocs successifs d'une molécule.

Considérons maintenant une masse gazeuse dans laquelle l'équilibre est troublé. Prenons un certain volume de ce gaz, qui soit assez petit pour qu'on puisse y regarder l'état comme partout le même, et pour qu'on puisse par conséquent, dans l'établissement des équations du mouvement, le traiter comme un élément de volume. Si la condition α est remplie, nous pourrons, d'un autre côté, donner à cet élément de volume des dimensions grandes par rapport au trajet libre des molécules. Il en résultera qu'une molécule, pénétrant par un côté de l'élément, le traversera très rarement en entier sans avoir subi de choc. On doit se figurer, au contraire, que les molécules nouvellement introduites, après avoir parcouru un trajet très court, s'engagent dans une série de rencontres avec les molécules contenues déjà dans l'élément; et, de même, que les molécules

sortant de l'élément ont fait partie de celles qui s'y trouvaient soumises entre elles à des collisions répétées.

Si l'entrée des molécules et la sortie d'autres molécules se faisaient à un moment déterminé, il se passerait un certain temps, de l'ordre déjà indiqué, avant que les chocs mutuels n'eussent rétabli dans l'élément un état stationnaire. Mais, en réalité, l'entrée et la sortie ont lieu d'une manière continue, et par conséquent, à proprement parler, l'état stationnaire qui correspond à la densité, à la température et à la vitesse hydrodynamique du gaz n'existera jamais. L'état de mouvement des molécules conservera toujours les traces de ce qu'il a été antérieurement. Néanmoins, pourvu que le temps nécessaire au rétablissement de l'état stationnaire soit suffisamment court (condition β), il est clair qu'on pourra admettre, avec un haut degré d'approximation, qu'un pareil état est réalisé à chaque instant. Seulement, la densité, la vitesse et la température changent alors continuellement par le fait des molécules qui entrent et qui sortent, et la manière dont ce changement s'effectue est indiqué par nos équations du mouvement.

Pour une théorie complète de différents phénomènes du son, il ne suffit pas de connaître les équations du mouvement des gaz, mais il faut considérer encore ce qui a lieu à la surface des corps (solides ou liquides) avec lesquels le gaz est en contact.

Si cette surface est parfaitement lisse, un état de mouvement du gaz, partout identique, est évidemment possible, pourvu que la surface possède, dans la direction de la normale, la même vitesse que la couche gazeuse juxtaposée. Si l'état du gaz varie d'un point à l'autre et d'un instant à l'autre, on pourra encore, à la condition qu'il soit satisfait à α et β, regarder l'état de la couche contiguë à la paroi comme égal à celui qui existerait si dans toute la masse gazeuse régnait le même état que dans la couche en question. Il suit de là que, même alors, le mouvement sera encore possible, pourvu qu'à chaque instant la paroi et la couche gazeuse limitrophe concor-

dent en vitesse normale. Telle est la condition limite qu'on introduit ordinairement dans la théorie mathématique du son. Toutefois, la question ne présente ce degré de simplicité que lorsqu'il est satisfait à α et β; elle deviendrait plus compliquée si, par exemple, un corps solide acquerrait tout d'un coup une certaine vitesse dans un gaz en repos.

En réalité, une paroi n'est jamais parfaitement lisse à l'égard des molécules du gaz; nous devons la regarder, au contraire, comme composée elle-même de molécules et recouverte d'une couche de gaz condensé, comme très rugueuse par conséquent. Nous devons admettre aussi un échange de chaleur entre la surface et le gaz. Cela posé, il est clair qu'un mouvement du gaz, satisfaisant aux conditions α et β, pourra exister lorsque, entre la surface et la couche gazeuse contiguë, il y a concordance de vitesse, normale et tangentielle, et de température. Si les conditions α et β ne sont pas remplies, le problème devient de nouveau plus compliqué; il pourra alors y avoir glissement le long de la paroi et différence de température entre celle-ci et le gaz.

Finalement, nous examinerons encore l'énergie existant dans un gaz qui est le siège d'un mouvement sonore. La grandeur de cette énergie est donnée immédiatement par l'équation (10), ou

$$R = \frac{1}{2}\delta(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2}\delta h + \delta\vartheta(h),$$

puisque $R\,d\tau$ est l'énergie contenue dans un élément de volume.

De cette équation nous pouvons toutefois en déduire une autre, ne renfermant plus que u, v, w et s, si, à l'aide des équations du mouvement, nous exprimons d'abord h en s. Pour le cas où l'on ne conserve que la première puissance de s, cela a déjà été fait au commencement de ce §; mais, comme il est désirable d'obtenir l'énergie R plus exactement, à des quantités du second ordre près (si u, v, w, s sont du premier ordre), il faut maintenant déduire de (a_2), (b_2), (c_2) la relation qui lie h à s.

A cet effet, représentons-nous un point Q, se mouvant de

telle sorte que sa vitesse soit toujours égale à la vitesse hydrodynamique qui existe à l'endroit où il se trouve. En prenant alors, à un moment quelconque t, pour les quantités δ et h les valeurs qu'elles ont en Q, on a:

$$\frac{d\delta}{dt} = u\frac{\partial \delta}{\partial x} + v\frac{\partial \delta}{\partial y} + w\frac{\partial \delta}{\partial z} + \frac{\partial \delta}{\partial t};$$

une relation analogue existe aussi pour h, et de (a_2) et (e_2) on déduit:

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{3}{2}[1 + 2\vartheta'(h)]\frac{dh}{h},$$

par conséquent, puisque dans l'état originaire d'équilibre on avait $\delta = \delta_0$, $h = h_0$,

$$l\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right) = l(1 + s) = \frac{3}{2}\int_{h_0}^{h}[1 + 2\vartheta'(h)]\frac{dh}{h}.$$

Il suit de là, avec une exactitude allant jusqu'au second ordre,

$$h = h_0 + \frac{2h_0}{3[1 + 2\vartheta'(h_0)]}s -$$
$$- \frac{2h_0}{3[1 + 2\vartheta'(h_0)]}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2h_0\vartheta''(h_0) - [1 + 2\vartheta'(h_0)]}{[1 + 2\vartheta'(h_0)]^2}\right\}s^2.$$

On trouve ensuite, avec le même degré d'exactitude:

$$R = \frac{1}{2}\delta_0[h_0 + 2\vartheta(h_0)] + \frac{1}{6}\delta_0[5h_0 + 6\vartheta(h_0)]s +$$
$$+ \delta_0 h_0 \cdot \frac{5 + 6\vartheta'(h_0)}{18[1 + 2\vartheta'(h_0)]}s^2 + \frac{1}{2}\delta_0(u^2 + v^2 + w^2).$$

Dans l'état d'équilibre, cette valeur devient:

$$R_0 = \frac{1}{2}\delta_0[h_0 + 2\vartheta(h_0)],$$

et la quantité

$$R - R_0 = \frac{1}{6}\delta_0[5h_0 + 6\vartheta(h_0)]s + \delta_0 h_0 \cdot \frac{5 + 6\vartheta'(h_0)}{18[1 + 2\vartheta'(h_0)]}s^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\delta_0(u^2 + v^2 + w^2). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

indique, par conséquent, de combien l'énergie excède celle qui existe à l'état d'équilibre.

Les deux derniers termes de ce résultat s'accordent entièrement, comme il est facile de le montrer, avec la valeur que M. Grinwis [1]) a obtenue, par une autre voie, pour l'énergie du mouvement sonore. Notre premier terme ne figure pas dans cette valeur, mais cela tient uniquement à ce que l'énergie calculée par M. Grinwis a une signification un peu différente de celle de la quantité $R - R_0$ calculée par nous. Pour que les résultats soient entièrement comparables, il faut apporter une petite modification au calcul de M. Grinwis, et résoudre le problème suivant [2]). Un espace S est rempli de gaz ayant une densité plus grande qu'à l'état normal, et cette condensation a été produite par voie adiabatique; on demande de combien l'énergie contenue dans ce gaz est supérieure à celle qui existerait, *dans le même espace*, s'il était rempli de gaz de la densité normale. En calculant alors, non pas l'intégrale

$$\int_{V+S}^{S} -(p - p_0)\, d\, v,$$

mais l'intégrale

$$-\int_{V+S}^{S} p\, d\, v,$$

on trouve de combien l'énergie contenue dans l'espace S surpasse celle qui, à l'état normal, existerait dans l'espace $S + V$. Pour résoudre le problème posé, ce n'est toutefois pas avec cette dernière énergie que la comparaison doit se faire, mais avec celle qui, à l'état d'équilibre, se trouve dans l'espace S. Au résultat de l'intégration indiquée, il faudra donc encore ajouter l'énergie qui à l'état normal existe dans l'espace V. En exécutant le calcul de cette façon, on obtient un résultat tout à fait conforme à la formule (11).

---

[1]) Grinwis, *Sur la théorie mécanique du son*, dans: *Arch. néerl.*, t. X.

[2]) *Ibid.*, p. 137, 138.

Nous devons faire observer, toutefois, que le premier terme de cette formule s'évanouit lorsque, dans le cas des vibrations sonores, on cherche l'énergie moyenne d'un élément de volume pendant la durée d'une vibration; en effet, la valeur moyenne de s est alors zéro. Il en est de même lorsqu'on calcule l'énergie dans une portion de l'espace contenant la même quantité de gaz qu'à l'état d'équilibre. Pour la masse gazeuse *totale*, l'énergie du mouvement sonore est, en tout cas, une quantité du second ordre.

M. Rink, dans le Mémoire déjà cité, a aussi considéré l'énergie du mouvement sonore. Pour cela, il a calculé la quantité d'énergie communiquée par une plaque vibrante aux molécules qui viennent la heurter. Dans le résultat il entre de nouveau un terme du premier ordre, et l'auteur signale la grande différence que ce résultat présente avec celui de M. Grinwis. Mais il ne remarque pas que l'absence d'un terme du premier ordre, chez M. Grinwis, est simplement une conséquence de la manière dont celui-ci a calculé l'énergie.

Comme M. Rink n'a pas cherché combien il existe d'énergie dans un volume déterminé du gaz, mais seulement combien d'énergie est communiquée au gaz par un corps vibrant, son résultat n'est pas directement comparable au nôtre.

§ 5. Déduction plus exacte des équations du mouvement. Frottement interne et conductibilité calorifique.

Au § 3, nous avons obtenu les équations (a_2), (b_2), (c_2) en négligeant tout à fait la fonction f dans l'expression (6). Maintenant nous allons essayer de pousser l'approximation plus loin, c'est-à-dire, de faire entrer en ligne de compte la circonstance que l'état de mouvement en un point de la masse gazeuse n'est pas entièrement identique à celui qui existerait si, dans toute l'étendue de cette masse et d'une manière persistante, N, h, u, v, w, avaient les mêmes valeurs qu'au point considéré.

Nous continuerons à admettre, toutefois, que les conditions α, β, γ sont remplies, de sorte que f devient encore très petite comparativement à $NF_0 - (NF_0)_e$.

Nous pouvons alors prendre pour point de départ de nos raisonnements l'équation (II); à la vérité, quelques termes $\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \text{etc.}\right)$ y sont négligés, mais comme ils sont très petits en comparaison de ceux que nous avons conservés, l'erreur ainsi commise sur f sera aussi très petite par rapport à cette quantité, déjà petite elle-même. En d'autres termes, si nous appelons f une quantité du premier ordre, nous négligerons les quantités du second ordre.

Dans l'équation (II), il faut entendre par F_0 l'expression

$$F_0(\xi-u, \eta-v, \zeta-w, E, p_1, \ldots p_k, h).$$

Si l'on observe qu'en général N, u, v, w, h dépendent de x, y, z, t, on voit que cette équation devient:

$$\begin{aligned} b_1-a_1= & N\frac{\partial F_0(\xi-u,..)}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x}+N\frac{\partial F_0(\xi-u,..)}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y}+N\frac{\partial F_0(\xi-u,..)}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z}+ \\ & + F_0(\xi-u,\ldots)\left[\frac{\partial N}{\partial x}\xi+\frac{\partial N}{\partial y}\eta+\frac{\partial N}{\partial z}\zeta+\frac{\partial N}{\partial t}\right] - \\ & - N\frac{\partial F_0(\xi-u,\ldots)}{\partial \xi}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\xi+\frac{\partial u}{\partial y}\eta+\frac{\partial u}{\partial z}\zeta+\frac{\partial u}{\partial t}\right] - \\ & - N\frac{\partial F_0(\xi-u,\ldots)}{\partial \eta}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\xi+\frac{\partial v}{\partial y}\eta+\frac{\partial v}{d z}\zeta+\frac{\partial v}{\partial t}\right] - \\ & - N\frac{\partial F_0(\xi-u,\ldots)}{\partial \zeta}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\xi+\frac{\partial w}{\partial y}\eta+\frac{\partial w}{\partial z}\zeta+\frac{\partial w}{\partial t}\right] + \\ & + N\frac{\partial F_0(\xi-u,\ldots)}{\partial h}\left[\frac{\partial h}{\partial x}\xi+\frac{\partial h}{\partial y}\eta+\frac{\partial h}{\partial z}\zeta+\frac{\partial h}{\partial t}\right]. \end{aligned}$$

En un point donné du gaz et à un moment donné, le second membre est une fonction entièrement connue de ξ, η, ζ, E, $p_1, \ldots p_k$. Dans cette fonction, que nous désignerons par χ, les quantités N, $u, \ldots \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots$ figurent à titre de constantes. Au premier membre, b_1-a_1 a cette signification qu'on en peut

déduire, en multipliant par $d\lambda dt$, de combien augmenterait à raison des chocs, durant le temps dt, dans l'unité de volume de la masse gazeuse P introduite ci-dessus (p. 8), le nombre des molécules du groupe défini au § 1. Dans cette masse P on a partout

$$F = NF_0(\xi - u, \ldots) + f(\xi, \eta, \zeta, \ldots),$$

avec des valeurs constantes pour N, u, v, w, h. Exprimée aussi brièvement que possible, notre équation devient:

$$b - a\,[\text{pour } F = NF_0(\xi - u, \ldots) + f(\xi, \eta, \zeta, \ldots)] = \chi(\xi, \eta, \zeta, \ldots),$$

et il s'agit maintenant d'en déduire f, autrement dit, de déterminer l'écart qui doit exister entre l'état de P et l'état stationnaire $NF_0(\xi - u, \ldots)$ pour que, dans l'unité de volume et durant le temps dt, le nombre des molécules du groupe du § 1 éprouve, par suite des chocs, l'accroissemeni prescrit $\chi(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, d\lambda\, dt$.

Nous pouvons maintenant faire usage de la circonstance que, sans rien changer aux mouvements relatifs des molécules, on peut donner à l'ensemble du gaz P une vitesse hydrodynamique $(-u, -v, -w)$. La fonction qui détermine la distribution des différents états de mouvement prend alors une valeur nouvelle, qu'on obtient en remplaçant, dans la valeur primitive, ξ, η, ζ par $\xi + u$, $\eta + v$, $\zeta + w$. En outre, dans le nouvel état, le nombre des molécules du groupe ayant pour limites ξ et $\xi + d\xi$, η et $\eta + d\eta$, ζ et $\zeta + d\zeta$, E et $E + dE$, etc. subira, par suite des chocs, un changement égal à celui qu'éprouvait, dans le premier état, le nombre des molécules du groupe ayant pour limites $\xi + u$ et $\xi + u + d\xi$, $\eta + v$ et $\eta + v + d\eta$, $\zeta + w$ et $\zeta + w + d\zeta$, E et $E + dE$, etc. Analytiquement, cela s'exprime par l'équation

$$b - a\,[\text{pour } F = NF_0(\xi, \eta, \zeta, , \ldots) + f(\xi + u, \ldots)] = \\ = \chi(\xi + u, \eta + v, \zeta + w, \ldots).$$

Donc, si on peut déterminer la fonction $f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$ de telle sorte qu'il soit satisfait à l'équation

$$b - a\,[\text{pour } F = NF_0(\xi, \eta, \zeta, \ldots) + f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)] = \\ = \chi(\xi + u, \eta + v, \zeta + w, \ldots), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

— c'est-à-dire, si l'on peut trouver de combien l'état de P doit différer de l'*état de repos* stationnaire $N F_0 (\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, pour que le nombre des molécules du groupe sus-indiqué varie d'une manière prescrite, — on aura

$$f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = f(\xi + u, \eta + v, \zeta + w, \ldots),$$

et par conséquent

$$f(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = f'(\xi - u, \eta - v, \zeta - w, \ldots) \ldots . (13)$$

Des conditions (7), relatives à f, on déduit encore facilement pour f' les conditions:

$$\int f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, d\lambda = \int f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, \xi\, d\lambda = \int f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, \eta\, d\lambda =$$

$$= \int f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, \zeta\, d\lambda = \int f'(\xi, \eta, \zeta, \ldots)\, r^2\, d\lambda = 0 \ldots (14)$$

Une fois f' trouvée au moyen de (12) et (14), puis f au moyen de (13), on peut passer au calcul des contingents qui en résultent pour P_x, etc. et que nous désignerons par P'_x etc. De (13) et (14) on déduit aisément

$$\left.\begin{aligned}
P'_x &= \int f' \xi^2\, d\lambda, \quad P'_y = \int f' \eta^2\, d\lambda, \quad P'_z = \int f' \zeta^2\, d\lambda, \\
Q'_{x,y} &= \int f' \xi \eta\, d\lambda, \quad Q'_{y,z} = \int f' \eta \zeta\, d\lambda, \quad Q'_{z,x} = \int f' \zeta \xi\, d\lambda, \\
R' &= \int f' \left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda, \\
S'_x &= \int f' \xi \left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda + m(u P'_x + v Q'_{x,y} + w Q'_{x,z}) + \\
&\quad + u \int f' E\, d\lambda, \\
S'_y &= \int f' \eta \left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda + m(u Q'_{x,y} + v P'_y + w Q'_{y,z}) + \\
&\quad + v \int f' E\, d\lambda, \\
S'_z &= \int f' \zeta \left(\frac{1}{2} m r^2 + E\right) d\lambda + m(u Q'_{x,z} + v Q'_{y,z} + w P'_z) + \\
&\quad + w \int f' E\, d\lambda,
\end{aligned}\right\} . (15)$$

où, comme dans tout ce qui suivra, on doit entendre par f la fonction f' $(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$.

Si dans l'équation (12) on remet pour χ sa valeur primitive, et que désormais on entende toujours par F_0 la fonction F_0 $(\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \ldots p_k, h)$, on a, pour déterminer f',

$$b - a\left[\text{pour } F = NF_0 + f\right] = N\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + N\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y} + N\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial z} +$$

$$+ F_0\left[\frac{\partial N}{\partial x}(\xi + u) + \frac{\partial N}{\partial y}(\eta + v) + \frac{\partial N}{\partial z}(\zeta + w) + \frac{\partial N}{\partial t}\right] -$$

$$- N\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(\xi + u) + \frac{\partial u}{\partial y}(\eta + v) + \frac{\partial u}{\partial z}(\zeta + w) + \frac{\partial u}{\partial t}\right] -$$

$$- N\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\left[\frac{\partial v}{\partial x}(\xi + u) + \frac{\partial v}{\partial y}(\eta + v) + \frac{\partial v}{\partial z}(\zeta + w) + \frac{\partial v}{\partial t}\right] -$$

$$- N\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\left[\frac{\partial w}{\partial x}(\xi + u) + \frac{\partial w}{\partial y}(\eta + v) + \frac{\partial w}{\partial z}(\zeta + w) + \frac{\partial w}{\partial t}\right] +$$

$$+ N\frac{\partial F_0}{\partial h}\left[\frac{\partial h}{\partial x}(\xi + u) + \frac{\partial h}{\partial y}(\eta + v) + \frac{\partial h}{\partial z}(\zeta + w) + \frac{\partial h}{\partial t}\right]. \quad (16)$$

Le second membre de cette équation se laisse encore notablement simplifier. A cet effet, nous pouvons d'abord faire usage des équations de mouvement (a_2), (b_2), (c_2); il est vrai que maintenant elles ne sont plus tout à fait exactes, mais elles n'en pourront pas moins servir à calculer le second membre de (16), qui n'a qu'une faible valeur. Ensuite on peut se dispenser, comme nous l'avons vu précédemment, de tenir compte des quantités

$$\frac{\partial F_0}{\partial \xi}+\frac{3}{h}F_0\,\xi,\quad \frac{\partial F_0}{\partial \eta}+\frac{3}{h}F_0\,\eta,\quad \frac{\partial F_0}{\partial \zeta}+\frac{3}{h}F_0\,\zeta,$$

lorsqu'elles sont multipliées par un facteur indépendant de ξ, η, ζ, E, $p_1, \ldots p_k$. L'équation (16) devient alors:

$$b-a\,[\text{pour } F=NF_0+f'] =$$

$$= N\left(\xi\frac{\partial F_0}{\partial h}+\frac{1}{3}\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\right)\frac{\partial h}{\partial x}+N\left(\eta\frac{\partial F_0}{\partial h}+\frac{1}{3}\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\right)\frac{\partial h}{\partial y}+$$

$$+N\left(\zeta\frac{\partial F_0}{\partial h}+\frac{1}{3}\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\right)\frac{\partial h}{\partial z}-$$

$$-N\left(\eta\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{dy}+\xi\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial x}\right)-N\left(\zeta\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial z}+\eta\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\frac{\partial w}{\partial y}\right)-$$

$$-N\left(\xi\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\frac{\partial w}{\partial x}+\zeta\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial z}\right)-$$

$$-N\left(\xi\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial F_0}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial y}+\zeta\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\frac{\partial w}{\partial z}\right)-$$

$$-N\left\{F_0+\frac{2h}{3[1+2\vartheta'(h)]}\frac{\partial F_0}{\partial h}\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\ \ldots\ (17)$$

Pour en déduire f', ou plutôt la valeur des intégrales qui entrent dans les équations (15), nous pouvons (voir p. 19) chercher les valeurs qui correspondent à différentes parties du second membre de (17) et en prendre la somme. Dans le choix de ces parties, nous nous laisserons guider par la considération de quelques cas simples.

a. Supposons le gaz en repos, et admettons que la température, et par conséquent h, soit une fonction de x. Le second membre de (17) devient alors:

$$N\left(\xi\frac{\partial F_0}{\partial h}+\frac{1}{3}\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\ \ldots\ldots\ldots\ (18)$$

Par un raisonnement semblable à celui que nous avons déjà

employé plus haut, c'est-à-dire, en considérant les images du gaz par rapport à des plans perpendiculaires aux axes des coordonnées, on peut montrer que la valeur de f', qui répond à cette expression (18), ne peut fournir un contingent l que pour l'intégrale $\int f\xi\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)\cdot d\lambda$, lequel contingent est évidemment proportionnel à $\frac{\partial h}{\partial x}$. Mais, si T est la température, on a $\frac{\partial h}{\partial x}=e\frac{\partial T}{\partial x}$, où e est pour chaque gaz une constante connue. Par conséquent, l est aussi proportionnel à $\frac{\partial T}{\partial x}$ et peut être représenté par $-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}$. Le coefficient $\varkappa$ ainsi introduit n'est autre chose que le *coefficient de conductibilité calorifique*, ce qui ressort de ce que l'intégrale $\int f'\xi\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda$ représente (exprimé en unités de travail) l'excès de la quantité de chaleur qui, dans l'unité de temps et à travers l'unité de surface d'un plan perpendiculaire à l'axe des x, passe dans le sens des x positifs, sur celle qui passe dans le sens opposé.

Si l'on connaissait la structure des molécules et leur action mutuelle, il y aurait quelque espoir de pouvoir calculer $\varkappa$. A défaut de cette connaissance, tout ce que nous pouvons déduire de nos équations, c'est que $\varkappa$, ainsi qu'il a déjà été montré par divers physiciens, est indépendant de la densité.

Comparons, en effet, deux masses gazeuses qui aux points correspondants ont la même température, mais dont la seconde est p fois aussi dense que la première. En vertu de (18), la différence $b-a$ doit alors être, pour le second gaz, p fois aussi grande que pour le premier. Or, l'expression NF_0 étant déjà pour ce gaz p fois aussi grande que pour l'autre, une valeur de f', égale pour les deux gaz, donnera le rapport en question pour les valeurs de $b-a$; de là découle immédiatement l'égalité de $\varkappa$ dans les deux càs.

Tout comme le premier terme de (17), on peut aussi traiter les deux suivants. On trouve ainsi que ces trois termes fournissent pour S'_x, S'_y, S'_z les contingents:

$$-\frac{\varkappa}{e}\frac{\partial h}{\partial x}, \quad -\frac{\varkappa}{e}\frac{\partial h}{\partial y}, \quad -\frac{\varkappa}{e}\frac{\partial h}{\partial z} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

b. Admettons, en second lieu, que le gaz, avec une densité et une température partout les mêmes, possède dans le sens de l'axe des x une vitesse hydrodynamique dépendant seulement de y. Le second membre de (17) devient alors:

$$-N\eta\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

La considération des images nous apprend que de cette expression il ne peut résulter un contingent l' que pour $\int f'\xi\eta\,d\lambda$. Ce contingent est évidemment proportionnel à $\frac{\partial u}{\partial y}$; si l'on pose

$$l' = -\frac{\mu}{m}\frac{\partial u}{\partial y},$$

μ est le *coefficient de frottement*, dont on peut de nouveau montrer, tout comme pour $\varkappa$, l'indépendance de la densité. En traitant exactement de la même manière les autres termes de (17), analogues à $-N\eta\frac{\partial F_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial y}$, on obtient pour $Q'_{x,y}$, $Q'_{y,z}$, $Q'_{z,x}$ les contingents

$$-\frac{\mu}{m}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad -\frac{\mu}{m}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad -\frac{\mu}{m}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right). \quad . \quad (20)$$

et pour S'_x, S'_y, S'_z

$$- \mu \left[v \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right],$$

$$- \mu \left[w \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right],$$

$$- \mu \left[u \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \quad \ldots \quad (21)$$

c. Pour trouver ce que les termes

$$- N \left(\xi \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad \ldots \quad (22)$$

de l'équation (17) fournissent pour P'_x etc., nous pouvons faire usage de l'artifice suivant. En sus des axes des x et des y, introduisons deux nouveaux axes des x' et des y', dont le premier divise en deux parties égales l'angle compris entre l'axe des x positifs et l'axe des y positifs, tandis que le second divise de même l'angle entre l'axe des x négatifs et l'axe des y positifs. Représentons-nous, en outre, qu'il existe dans le gaz un mouvement hydrodynamique dans la direction de l'axe des x', avec une vitesse $u' = c y'$ (c constant). On a alors:

$$u = v = c y' \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{1}{2} c, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} c,$$

et le second membre de (17) devient:

$$- \frac{1}{2} Nc \left(\eta \frac{\partial F_0}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2} Nc \left(\xi \frac{\partial F_0}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \right) \quad \ldots \quad (23)$$

Comme, d'après ce qui a été dit en b, les deux termes

$$- \frac{1}{2} N c \, \eta \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} N c \, \xi \frac{\partial F_0}{\partial \eta}$$

donnent pour $\int f' \xi \eta d\lambda$ des parts égales mais de signes opposés, il n'y a que le dernier terme de (23) qui puisse fournir des contingents à P'_x, etc. Or, ceux-ci sont faciles à trouver. Car, le

mouvement supposé étant exactement de même nature que celui considéré en b, on peut indiquer immédiatement la quantité de mouvement qui passe par l'unité de surface d'un plan perpendiculaire à l'axe des x', ou à l'axe des y'. De cette quantité on peut ensuite déduire, par un raisonnement simple (en considérant les quantités de mouvement qui entrent et qui sortent par les différentes faces d'un élément de volume convenablement choisi), la quantité analogue pour un plan perpendiculaire à l'axe des x ou à l'axe des y. On trouve ainsi que l'expression (23) donne pour P'_x la part $\frac{\mu}{m}c$, pour P'_y la part $-\frac{\mu}{m}c$, tandis qu'on n'obtient aucun contingent pour $Q'_{x,y}$, $Q'_{y,z}$, $Q'_{z,x}$, R', $\int f'\xi\left(\frac{1}{2}mr^2 + E\right)d\lambda$, etc.

Ecrivons maintenant, dans le cas général, l'expression (22) sous la forme

$$\frac{1}{3}N\left(\xi\frac{\partial F_0}{\partial\xi}-\eta\frac{\partial F_0}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{3}N\left(\eta\frac{\partial F_0}{\partial\eta}-\zeta\frac{\partial F_0}{\partial\zeta}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{1}{3}N\left(\zeta\frac{\partial F_0}{\partial\zeta}-\xi\frac{\partial F_0}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial w}{dz}\right)-$$
$$-\frac{1}{3}N\left(\xi\frac{\partial F_0}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial F_0}{\partial\eta}+\zeta\frac{\partial F_0}{\partial\zeta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad \ldots \quad (24)$$

Le premier terme se déduit du dernier de (23), si l'on pose

$$c=\frac{2}{3}\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

de sorte qu'on peut assigner immédiatement la part que ce terme fournit pour P'_x, etc.

Il en est de même des deux termes suivants. En posant, pour abréger,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=K,$$

on trouve

$$\text{pour } P'_x \quad -2\frac{\mu}{m}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2}{3}\frac{\mu}{m}K,$$

$$\text{„} \quad P'_y \quad -2\frac{\mu}{m}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{2}{3}\frac{\mu}{m}K,$$

$$\text{„} \quad P'_z \quad -2\frac{\mu}{m}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{2}{3}\frac{\mu}{m}K,$$

$$\text{„} \quad S'_x \quad -2\mu u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2}{3}\mu u K,$$

$$\text{„} \quad S'_y \quad -2\mu v\frac{\partial v}{d y}+\frac{2}{3}\mu v K,$$

$$\text{„} \quad S'_z \quad -2\mu w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{2}{3}\mu w K.$$

d. **Finalement**, il nous reste encore à parler de la quantité

$$-N\left[F_0+\frac{2h}{3[1+2\vartheta'(h)]}\frac{\partial F_0}{\partial h}+\frac{1}{3}\left(\xi\frac{\partial F_0}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial F_0}{\partial \eta}+\xi\frac{\partial F_0}{\partial \zeta}\right)\right].K, \quad \ldots (25)$$

qu'on obtient par la réunion des derniers termes de (24) et de (17).

En considérant de nouveau les images de la masse gazeuse, on reconnaît que la valeur de f', qui répond à (25), donne:

$$\int f'\xi\eta\,d\lambda=\int f'\eta\zeta\,d\lambda=\int f'\zeta\xi\,d\lambda=\int f'\xi\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda=$$

$$=\int f'\eta\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda=\int f'\zeta\left(\frac{1}{2}mr^2+E\right)d\lambda=0.$$

Comme, d'un autre côté, on aura évidemment

$$\int f'\xi^2\,d\lambda=\int f'\eta^2\,d\lambda=\int f'\zeta^2\,d\lambda,$$

chacune de ces quantités est $= \frac{1}{3}\int f' r^2 \, d\lambda$, et par conséquent, en vertu de (14), $= 0$. Il n'y a donc que l'intégrale $\int f' E \, d\lambda$ qui puisse différer de 0. Elle pourra être représentée par νK, ν étant un coefficient constant, qui, de même que μ et $\varkappa$, est indépendant de la densité du gaz. En définitive, nous trouvons alors pour R' le contingent νK, et pour S'_x, S'_y, S'_z, respectivement $\nu u K$, $\nu v K$, $\nu w K$.

Ce coefficient ν, qui ne se présente que pour les gaz polyatomiques (car, pour les gaz monoatomiques, E et par conséquent ν sont nuls), est ici introduit pour la première fois, du moins à ma connaissance. On pourra le mieux se rendre compte de sa signification par les considérations suivantes.

Lorsqu'un gaz se trouve dans un état stationnaire de repos, il existe une certaine relation entre l'énergie A_1 du mouvement de translation des molécules et l'énergie intramoléculaire A_2; pour l'unité de masse, ces énergies sont $\frac{1}{2} h$ et $\vartheta(h)$. Mais il n'en est plus ainsi quand l'état est variable. Si, par exemple, un gaz est comprimé, la vitesse du mouvement des molécules, et par conséquent h, augmentent. Par suite des chocs, A_2 croîtra aussi; toutefois, un certain temps sera nécessaire pour faire acquérir à A_2 la valeur $\vartheta(h)$ qui, dans l'état stationnaire, répondrait à la nouvelle valeur de A_1. Pendant la durée de la compression, c'est-à-dire tant que h croît, on aura $A_2 < \vartheta(h)$.

Or, c'est là ce qui est indiqué par ν. Lors d'une compression, en effet, K a une certaine valeur, et νK détermine exactement de combien A_2 diffère de $\vartheta(h)$. Comme K est négatif durant la compression, et qu'on doit avoir $A_2 < \vartheta(h)$, il en résulte que la valeur de ν doit être positive.

Malheureusement, une détermination expérimentale de ν paraît avoir peu de chances de réussite. Pour que l'influence de ν pût devenir sensible, il faudrait des variations de densité s'effectuant

avec beaucoup plus de rapidité que cela n'est le cas dans les expériences ordinaires sur les vibrations sonores.

Si maintenant nous résumons ce qui a été trouvé dans ce §, et que nous réunissions les valeurs de P'_x, etc. à celles que le § 3 a fournies pour P_x, etc., nous obtenons:

$$P_x = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{3}\delta\, h + \delta\, u^2 - 2\,\mu\frac{\partial\, u}{\partial\, x} + \frac{2}{3}\mu\, K\right], \text{ etc.}$$

$$Q_{x,y} = \frac{1}{m}\left[\delta\, u\, v - \mu\left(\frac{\partial\, u}{\partial\, y} + \frac{\partial\, v}{\partial\, x}\right)\right], \text{ etc.}$$

$$R = \frac{1}{2}\,\delta\,(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2}\,\delta\,[h + 2\,\vartheta(h)] + \nu\, K,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\delta\, u\left[\frac{5}{3}\, h + 2\,\vartheta\,(h) + (u^2 + v^2 + w^2)\right] - \frac{\varkappa}{e}\frac{\partial h}{\partial x} -$$

$$-\mu\left[v\left(\frac{\partial\, u}{\partial\, y} + \frac{\partial\, v}{\partial\, x}\right) + w\left(\frac{\partial u}{\partial\, z} + \frac{\partial\, w}{\partial\, x}\right)\right] -$$

$$-2\,\mu\, u\frac{\partial\, u}{\partial\, x} + \left(\frac{2}{3}\,\mu + \nu\right) u\, K, \text{ etc.}$$

En transportant ces valeurs dans les équations générales (a_1), (b_1), (c_1), on obtient finalement les équations du mouvement. Je n'exécuterai pas ici cette substitution, le résultat en étant très compliqué, et l'étant d'autant plus que, à la rigueur, μ, $\varkappa$ et ν doivent être considérés comme des fonctions de h. Je ferai seulement remarquer que, si l'on ne tient pas compte de la variabilité de μ, les équations (b_T) prennent une forme équivalente à celle sous laquelle elles ont été obtenues par M. Maxwell [1]).

Quand on se borne à un dérangement infiniment petit de l'équilibre, il est permis de regarder μ, $\varkappa$ et ν comme des constantes. Si, en outre, on supprime l'action des forces exté-

[1]) *Phil. Mag.* (4) XXXV, p. 209.

rieures, et qu'on introduise, comme au § 3, le signe s pour la condensation, les équations du mouvement deviennent:

$$K + \frac{\partial s}{\partial t} = 0, \ldots \ldots \ldots \ldots (a_4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{3}\frac{\partial(h + h_0 s)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\mu}{\delta_0}\Delta u - \frac{1}{3}\frac{\mu}{\delta_0}\frac{\partial K}{\partial x} = 0,\\
\frac{1}{3}\frac{\partial(h + h_0 s)}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\mu}{\delta_0}\Delta v - \frac{1}{3}\frac{\mu}{\delta_0}\frac{\partial K}{\partial y} = 0,\\
\frac{1}{3}\frac{\partial(h + h_0 s)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\mu}{\delta_0}\Delta w - \frac{1}{3}\frac{\mu}{\delta_0}\frac{\partial K}{\partial z} = 0,
\end{aligned}\right\} \ldots (b_4)$$

$$\frac{1}{3} h_0 K + \frac{1}{2}[1 + 2\vartheta'(h_0)]\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\varkappa}{\delta_0 e}\Delta h + \frac{\nu}{\delta_0}\frac{\partial K}{\partial t} = 0 \ldots (c_4)$$

NOUVEAUX

FAITS GÉOLOGIQUES OBSERVÉS À JAVA,

PAR LES INGÉNIEURS DES MINES

R. D. M. VERBEEK et **R. FENNEMA.**

(Communiqué par R. D. M. VERBEEK).

Introduction.

Dans mon Mémoire „*Over de geologie van Java*" [1], je faisais remarquer que rien n'était connu, avec certitude, de la présence de roches *anciennes*, c'est-à-dire *prétertiaires*, à Java, mais qu'il était peut-être permis de regarder comme telles quelques gabbros et serpentines.

Trois ans plus tard, M. Lorié pouvait encore témoigner la même chose dans son écrit „*Bijdrage tot de kennis der Javaansche Eruptiefgesteenten*, Rotterdam, 1879", où on lit, p. 267: „Du sous-sol de Java, des roches sur lesquelles reposent les terrains sédimentaires plus récents et les roches volcaniques, nous ne savons donc rien d'une manière certaine".

Il y a peu de semaines seulement, ce „sous-sol" de Java a été découvert par M. l'ingénieur des mines Fennema, dans une excursion qu'il faisait à Gombong, en vue de l'établissement de puits artésiens. — L'existence de roches anciennes à Java était

---

[1]) *Tijdschrift van het Aardrijkskundig Genootschap*, t. I (1876), p. 291—299.

du reste à prévoir; car, au cours d'un voyage de cinq jours, sur le bâtiment à vapeur l'Egeron, en juillet de cette année, j'avais reconnu que quelques îles du détroit de la Sonde étaient composées des mêmes schistes anciens qui se rencontrent à Sumatra, et il n'était pas probable que ces roches anciennes se montreraient si près de Java sans se prolonger aussi sur cette île même.

Dans les pages suivantes, je me propose de faire connaître succinctement ces découvertes de dépôts anciens; je décrirai ensuite quelques roches plus récentes, rares à Java et présentant beaucoup d'intérêt.

I. Formation schisteuse ancienne à la frontière des résidences de Bagelen et de Banjoemas.

Quiconque a étudié l'ouvrage de Junghuhn sur Java se rappellera la description de la partie méridionale des monts Sérajoe [1]), parmi les roches de laquelle il cite le gabbro, le diorite, le jaspe, le stéaschiste et le micaschiste. Junghuhn mentionne expressément que ces roches métamorphosées offrent des „passages" aux roches tertiaires ordinaires, n'ayant pas subi d'altération, et que par conséquent elles appartiennent aussi au terrain tertiaire, si étrange que puisse paraître, comme il le dit lui-même, la dénomination de „micaschiste tertiaire".

Il est probable que beaucoup de lecteurs, tout comme moi, auront trouvé cette description un peu vague, et que surtout la preuve de la métamorphose — attribuée essentiellement à l'apparition des roches éruptives, gabbro et diorite, — ne leur aura pas paru suffisamment convaincante.

Aussi longtemps, toutefois, que la question n'avait pas fait l'objet de recherches nouvelles et plus complètes, il n'y avait pas grand'chose à opposer à l'opinion de Junghuhn. Mais c'est à tort que M. Lorié, p. 3 de la brochure ci-dessus citée, écrit:

---

[1]) Traduction allemande, t. III, p. 268—278.

„les micaschistes et autres schistes cristallins de Junghuhn sont, suivant M. Verbeek, des roches tertiaires métamorphosées.” Jamais je n'ai dit ni voulu dire rien de pareil. J'ai seulement constaté que telle était l'opinion de Junghuhn, et je l'ai rappelé surtout pour montrer que l'expression „roches métamorphiques de la période de transition”, employée par M. Veth [1]), n'était pas motivée. Junghuhn, en effet, prétend tout juste le contraire, et jusqu'alors rien n'était venu infirmer sa manière de voir.

Le passage qui a donné lieu à cette méprise de M. Lorié est probablement le suivant [2]): „l'expression „roches métamorphiques de la *période de transition*” n'est pas très claire. Partout où Junghuhn parle de micaschistes, de stéaschistes, etc., il déclare formellement que ce sont des roches tertiaires métamorphosées.” Comme on le voit, ce passage n'a trait qu'à l'opinion de Junghuhn. J'aurais pu ajouter, il est vrai, que je ne la partageais pas sans réserves; mais, n'ayant encore à produire aucun fait à l'appui de mes doutes, je me suis abstenu de les énoncer.

Il y a un peu plus d'un mois, M. Fennema, ainsi que je l'ai dit, était allé explorer au point de vue géologique les environs de Gombong, pour s'assurer si cette localité pourrait être pourvue d'eau au moyen de sources artésiennes. Ayant profité de cette occasion pour faire une courte visite à la partie sud des monts Sérajoe, il ne tarda pas à reconnaître que les passages entre les schistes et les roches tertiaires, dont parle Junghuhn, en réalité n'existent pas; ensuite, que les schistes ne renferment pas de fossiles, mais bien de nombreuses veines de quartz et même des filons de porphyre quartzeux. Par ces caractères, la formation schisteuse en question s'éloignait évidemment des terrains tertiaires, et ressemblait entièrement à la formation schisteuse ancienne de Sumatra.

Les couches inférieures du terrain tertiaire, qui existe dans le voisinage, sont des conglomérats et des brèches, contenant de nombreux fragments des schistes anciens.

---

[1]) P. J. Veth, *Java*, t. I, p. 53.

[2]) R. D. M. Verbeek, *Over de geologie van Java*, *l. c.*, p. 292.

Je reproduis ici textuellement le rapport succinct dans lequel M. Fennema a consigné ses observations; pour qu'il soit plus facile de s'orienter, j'y joins une petite carte (Pl. I, fig. 2), qui est une copie de la carte topographique à l'échelle de 1 : 100,000.

„Au mois d'août, j'ai eu l'occasion de visiter la partie des monts Sérajoe, au pourtour du Midangan, où Junghuhn a signalé la présence du micaschiste, du gabbro et du diorite. On sait que Junghuhn s'est donné beaucoup de peine pour prouver que ces micaschistes proviennent de la métamorphose de couches tertiaires, qu'ils sont par conséquent du même âge que les dépôts tertiaires non altérés qu'on trouve au voisinage, et qu'il n'y a pas lieu d'y voir un terrain ancien, s'élevant comme une île au milieu de couches plus récentes.

Les gabbros et les diorites auraient joué, dans cette métamorphose, un rôle essentiel.

Mes recherches ont conduit à un résultat tout opposé. Le terrain en question m'a paru offrir tant de ressemblance avec les terrains anciens de Sumatra, qu'il ne me reste aucun doute que la formation schisteuse ancienne de cette île n'apparaisse ici au jour, sur une étendue de quelques kilomètres carrés, avec ses différentes sortes de schistes, ses quartzites et ses filons quartzeux.

Dans les couches inférieures du terrain tertiaire environnant, se trouvent des brèches et des conglomérats de toutes les roches qui viennent d'être nommées. Elles renferment la preuve qu'à une époque antérieure le terrain ancien s'élevait réellement, sous forme d'île, du sein de la mer tertiaire. Les conglomérats sont des formations littorales, dont les matériaux ont été fournis par la désagrégation des roches plus anciennes de cette île. Dans un rapport préliminaire, tel que celui-ci, il serait déplacé d'examiner point par point la démonstration de Junghuhn. Je me bornerai à communiquer brièvement les observations faites sur le terrain en question.

Les roches schisteuses anciennes se montrent sur une partie relativement peu étendue du massif méridional des monts Sérajoe. C'est la partie à laquelle Junghuhn a donné le nom de monts Look-Oeloe et qui, à 21¾ kilomètres au nord de Kéboemen, forme l'arête hydrographique entre la rivière Sérajoe et le cours supérieur du Loh-Oeloe.

De Loh-Kidang (voir la carte), la crête principale se dirige d'abord à peu près O. S. O. — E. N. E., puis, au nord de Sadang, elle s'infléchit vers le N. Un peu plus à l'est se trouve une autre crête, également dirigée vers le nord. Ces deux crêtes se réunissent en un faîte étroit, qui atteint au mont Midangan (1039 m. au-dessus du niveau de la mer) son point le plus élevé.

L'exploration du terrain se fait le plus facilement en partant du pasangrahan près de Sadang. Si l'on suit la nouvelle route qui de ce point conduit, dans la direction nord, vers les plantations de café du Midangan, on rencontre les roches principales suivantes :

Du *micaschiste*, composé de quartz et de muscovite, ordinairement très altéré par les influences atmosphériques, contenant de nombreux filons de quartz hyalin, à éclat gras. Outre le mica blanc, on y voit du talc, qui parfois devient prédominant, de sorte qu'alors la roche se change en *stéaschiste*. En d'autres points, le mica est rare et la roche passe au *schiste quartzitique*.

On trouve aussi beaucoup de *schistes serpentineux*, d'un vert sombre, très tendres, manifestement disposés en couches.

Avec ces schistes alternent des bancs de *silex corné rouge*. Sous le choc du marteau, cette roche se brise en fragments très irréguliers, par suite des nombreuses surfaces de fissure dont elle est traversée dans tous les sens. Ces bancs surtout sont riches en veines de quartz, qui ordinairement forment dans la masse un réseau continu. Quelquefois ces bancs de silex corné prennent une structure plus ou moins schistoïde; ils constituent alors de petites couches minces de schiste quartzitique ou de phtanite rouge brunâtre, qui offrent une division en feuillets trans-

versaux et se désagrègent par le choc en fragments ayant la forme de baguettes courtes.

Plus loin (au nord), prédominent des couches de *quartzite*, qui contiennent également de nombreuses veines de quartz et, en outre, çà et là, du graphite et une assez grande quantité de pyrite.

Entre les divers schistes qui viennent d'être nommés, on voit intercalés, en stratification nettement concordante, des bancs de calcaire rouge brunâtre et jaune, traversés par de minces veines de calcite blanche.

Ainsi qu'il arrive ordinairement dans les terrains schisteux anciens, la direction et l'inclinaison des couches ne sont pas très constantes. A un peu plus de 1 kilomètre au nord de Sadang, j'ai noté: direction = 86°, inclinaison au sud = 84°; 120 mètres plus loin: direction = 65°, inclinaison au nord = 59°. Encore 1½ kilom. plus loin, dans les schistes quartzitiques rouge brunâtre, l'observation donna: direction = 112°, inclinaison au nord = 60°.

L'inclinaison est généralement forte; la direction la plus habituelle se rapproche de l'est-ouest, tout en présentant de nombreuses déviations.

En prenant à Sigindit le sentier qui va à l'est, vers Samagoen, on trouve sur différents points, dans le micaschiste, des *filons de porphyre quartzeux* de 4 à 10 mètres d'épaisseur. Entre Kedoeng-Gong et Pesangkalan apparaît même au jour, sur une distance de plus de 1½ kilomètre, une *masse continue de porphyre quartzeux*.

Cette roche, qui attire déjà l'attention parmi les cailloux roulés du lit du Loh-Oloe, est composée d'une pâte rouge de chair, renfermant un grand nombre de gros cristaux de feldspath blanc-bleuâtre (plagioclase, au moins en partie) et de petits grains de quartz.

Le sommet du Midangan est formé d'une roche éruptive plus jeune, à savoir, d'*andésite*.

Le long du chemin qui de Sadang mène à l'est vers Poetjangan, sur la rive droite du Loh-Oeloe, on trouve des roches

entièrement semblables à celles indiquées ci-dessus. Le sous-sol, toutefois, est ici beaucoup moins dénudé. En quelques points, on peut facilement constater combien sont irrégulières la direction et l'inclinaison. Sur une distance de moins de 20 mètres, j'ai noté successivement:

direction = 20°, inclinaison à l'ouest = 36°;
„ = 29°, „ „ „ = 77°;
„ = 14°, „ „ „ = 44°.

La direction des schistes s'éloigne ici notablement de celle qu'ils affectent plus à l'est.

Quand on marche de Poetjangan vers le nord, on trouve à découvert, sur une étendue de plus de 500 mètres, un *schiste serpentineux* d'un vert clair.

Environ 200 mètres à gauche (à l'ouest) de ce sentier, on voit une masse calcaire isolée, en forme de pain de sucre, au sujet de laquelle je n'ai pu décider si elle repose en stratification discordante sur les schistes, ou si elle y est intercalée régulièrement. Ce calcaire est de couleur bleu foncé; la moitié de la masse, toutefois, consiste en veines, soit minces, soit épaisses, de calcite cristalline.

Entre Sadang et Poetjangan, la vallée du Loh-Oeloe forme la démarcation du terrain ancien et des couches tertiaires. Lorsqu'on suit un des sentiers qui se dirigent vers le sud, on coupe, à mesure qu'on s'élève, les têtes de ces couches.

Les couches tertiaires se composent, *vers le bas*, de conglomérats et de calcaire à foraminifères; *plus haut*, de marnes, de grès et de brèches, dont les matériaux ont été fournis surtout par l'andésite.

Les conglomérats formant les couches inférieures peuvent être le mieux étudiés un peu plus loin vers l'ouest. Ils sont très cohérents et composés de fragments arrondis de quartz et de quartzite; d'autres bancs, plus épais, renferment, en outre, de gros fragments de micaschiste, de schiste quartzitique, de porphyre quartzeux et de calcaire.

La direction générale de ces couches tertiaires varie de 40°

à 60°; leur inclinaison est de 45° à 10° au sud-est, et par conséquent non concordante avec celle des schistes anciens, qui plongent ordinairement au nord ou à l'ouest.

(*signé*) R. FENNEMA.

A cette description, qui met hors de doute que la formation schisteuse ancienne arrive au jour dans la localité susdite, je puis encore ajouter ce qui suit.

Le *schiste serpentineux au nord de Poetjangen*, examiné au microscope, se montre composé d'une masse vert clair, finement fibreuse, qui présente la polarisation d'agrégation. Dans cette masse se trouvent une multitude de fibres et de lamelles d'un vert plus pâle, qui polarisent un peu plus fortement. Les sections transversales fibreuses sont ordinairement courbes; elles paraissent devenir obscures quand les longs côtés sont parallèles à une section principale du nicol. On peut rapporter ces parties fibreuses à la chrysotile.

La masse renferme, en outre, une grande quantité d'une substance ferrugineuse octaédrique, probablement de la chromite. Cette substance est toujours opaque. Quelques petits octaèdres nets, de couleur brunâtre, sont translucides; je ne les regarde pas comme appartenant à la chromite, mais plutôt à la picotite; du moins, ils ressemblent beaucoup aux petits cristaux bien connus qu'on trouve si fréquemment inclus dans l'olivine.

Aucun reste des minéraux qui ont pu donner naissance à cette serpentine — tels que olivine, diallage ou bronzite — n'a été reconnu, d'une manière certaine, dans les lamelles microscopiques préparées jusqu'ici.

Le *porphyre quartzeux*, qui forme des filons dans les schistes, laisse distinguer au microscope les éléments suivants: De grands cristaux ternes de plagioclase, qui tous montrent encore distinctement le striage polysynthétique, et qui atteignent jusqu'à 7 millimètres de longueur; quant à l'orthoclase, on n'a pu le découvrir dans la roche et il paraît y faire entièrement défaut. — Des grains de quartz hyalin, souvent à contours réguliers,

dépassant rarement 3 millimètres. Ils renferment de nombreuses mais petites inclusions liquides, avec bulle mobile. — Ensuite, un peu de pyrite et d'assez grandes lamelles de mica, d'un vert très clair, qui ne sont pas incluses dans les cristaux de feldspath, mais disséminées en grand nombre dans la pâte.

Les cristaux dont il vient d'être question sont empâtés dans un mélange cristallin, à texture très finement saccharoïde, de petits grains de quartz et de mica jaune pâle, en lamelles et en fibres. On n'a pu distinguer du feldspath dans ce mélange; peut-être s'est-il transformé en mica, dont les nombreuses particules jaune clair me paraissent être ici d'origine secondaire. La présence d'une base isotrope n'a pas non plus été reconnue d'une manière certaine. La roche est donc un porphyre quartzeux à base micro-cristalline, un micro-granite, suivant la nomenclature de M. Rosenbusch.

Pour ce qui concerne les couches tertiaires, il me semble probable que les brèches et conglomérats inférieurs, ainsi que le calcaire à foraminifères, appartiennent à la période *éocène*, tandis que les couches supérieures, marnes, grès et brèches à matériaux andésitiques, se rapporteraient à la période *miocène*. Cette opinion se fonde sur ce que la plus ancienne éruption d'andésite, dans l'archipel indien, paraît avoir eu lieu partout à la fin de la période éocène.

Il est à souhaiter qu'on trouve plus tard des fossiles bien caractérisés dans ces couches sédimentaires, afin que leur âge, de même que celui de l'andésite, puisse être fixé avec certitude.

La partie sud des monts Sérajoe, appelée ci-dessus monts Loh-Oeloe, peut être divisée, d'après des deux hautes cimes, le Midangan (1039 mètres) et le Paras (519 mètres), en:

1°. Une partie septentrionale, au nord de la rivière Loh-Oloe, les *monts Midangan*. Cette partie contient les schistes anciens avec porphyre quartzifère, ainsi que l'andésite du Midangan lui-même.

2°. Une partie méridionale, au sud de la rivière Loh-Oeloe, les *monts Paras*. Elle est composée de roches tertiaires, probablement éocènes vers le bas, miocènes vers le haut.

II. Schistes anciens de quelques îles du détroit de la Sonde.

Dans le détroit de la Sonde (Pl. II, fig. 2), qui sépare Java de Sumatra, se trouvent plusieurs îles, qui presque toutes sont formées de matériaux éruptifs. Une exception est faite, sous ce rapport, par trois des îles de Zutphen, et par l'île dite le Brabantshoedje, voisine de la côte javanaise.

J'ai visité ces îles au mois de juillet de la présente année. C'est près du Varkenshoek, la plus orientale des trois pointes par lesquelles Sumatra se termine au sud, qu'est situé le groupe d'îles qui porte le nom d'îles de Zutphen. Il comprend les îles suivantes:

1°. Rimau besar.

2°. Rimau Ketjil (Fatal Island des cartes marines anglaises).

3°. Iles Boompjes.

4°. Les Gebroeders.

5°. Hout eiland.

6°. Hoog eiland.

7°. Un îlot non encore dénommé, au sud de Hoog eiland, et auquel j'ai donné le nom de „Klein eiland".

8°. L'île de Kandang.

De ces huit îles, les trois dernières seulement sont formées de roches schisteuses. Dans l'île de Kandang, on trouve des schistes gris, tantôt à feuillets très minces, tantôt en bancs épais. Ce sont des phtanites durs, dont la couleur varie du gris brunâtre au gris clair, et qui plongent de 145° au sud-ouest. — Hoog eiland est composée de phtanites à feuillets minces, de couleur gris brunâtre clair. — A Klein eiland on trouve un phtanite dur, brun chocolat.

Les mêmes phtanites se voient aussi au nord du volcan Radja-Bassa, dans l'île de Sumatra, à l'est du golfe de Lampong entre Tarahan et Teloeq-Betoeng.

Les schistes des îles de Zutphen doivent être regardés comme

le prolongement méridional des schistes de Teloeq-Betoeng, qui, entre Tarahan et le Varkenshoek, sont recouverts par les produits volcaniques du Radja-Bassa.

Il est à remarquer qu'aucun de ces schistes ne renferme des filons de quartz.

Près d'Anjer, à peu de distance de la côte javanaise, se trouve un très petit îlot, le Brabandshoedje (Pl. II, fig. 2), désigné sous le nom de „Cap" sur les cartes anglaises. Comme cet îlot est très rocheux et entouré en partie de récifs madréporiques, il est difficile d'en approcher avec une embarcation, car partout on rencontre des brisants assez violents; c'est au côté N. ou N.-E. qu'on peut encore le mieux aborder. Le Brabandshoedje est formé de phtanites blancs altérés, dans lesquels on distingue à l'œil nu des cristaux de feldspath et des lamelles de biotite plus ou moins décomposés. Direction des couches environ 135°, c'est-à-dire du N.-O. au S.-E.; inclinaison environ 60° au N.-E. La direction concorde donc encore avec celle de l'axe longitudinal de Sumatra. Les couches, d'une faible épaisseur (¼ à 2 et 3 centimètres), sont traversées de minces veines de spath calcaire, mais, tout comme aux îles Zutphen, il n'y a pas de filons quartzeux. Ces singuliers phtanites, avec feldspath et biotite, se trouvent aussi, exactement avec les mêmes caractères, aux environs de Teloeq-Betoeng. L'abondance du feldspath et de la biotite rend assez probable que ces schistes ont emprunté en grande partie leurs matériaux à des roches granitiques, en d'autres termes, qu'ils doivent être regardés comme des tufs granitiques silicifiés. Nulle part on n'y a trouvé de fossiles.

III. Schistes anciens et diorite du mont Gedéh près de Djasinga.

En 1837, M. Rigg annonça que du granite existait au mont Gedéh, près de Djasinga, et, un peu avant lui, M. Horner avait déjà fait mention de la présence de fragments granitiques

roulés dans le Tji-Madoer et le Tji-Ara, à la côte sud de Bantam [1]).

Bien que le Mémoire de Rigg eût reçu une publicité suffisante, personne ne paraît s'être donné la peine de vérifier sur les lieux jusqu'à quel point son assertion était fondée.

M. Lorié, page 3 de son travail *„Bijdrage tot de kennis der Javaansche eruptiefgesteenten"*, rappelle que M. Zöllinger (Petermann's *Geographische Mittheilungen*, 1858) a mentionné, sur la foi des indications de Rigg, l'existence du granite sur la pente du Goenoeng Gedéh. La montagne dont il s'agit n'est toutefois pas le célèbre volcan Gedéh, près de Buitenzorg, mais une éminence beaucoup moindre et beaucoup moins connue, le petit mont Gedéh au S. de Djasinga. — Djasinga est encore situé dans la sous-résidence de Buitenzorg, mais non loin des confins de Bantam. Le petit mont Gedéh a, d'après la nouvelle carte topographique, une altitude de 1020 mètres.

Junghuhn n'a pas visité cette localité; il dit seulement [2]) que l'existence du granite lui semble très possible, attendu que cette roche a été rencontrée dans la grande île voisine, Sumatra, et que lui-même a trouvé de la syénite à Java, dans le cratère du volcan Kéloet.

En ce qui concerne cette „syénite", toutefois, M. Lorié a montré qu'il faut très probablement y voir des produits volcaniques cristallins, des andésites pyroxéniques et amphiboliques (*l. c.*, p. 197—205).

Si, d'après ce qui précède, l'existence du granite près de Djasinga était encore fort incertaine, l'existence à Java de roches éruptives anciennes me paraissait pourtant, d'une manière générale, beaucoup moins improbable, depuis que les formations sédimentaires anciennes de Sumatra, — à savoir les schistes cris-

---

[1]) L. Horner, *Verslag van eene mineralogische reis in de residentie Bantam*, dans: *Verh. v. h. Bat. Genootsch.*, t. XVII, 1ère part., p. 29—60. — Jonathan Rigg, *Sketch of the geology of Jasinga*, dans *Verh. v. h. Bat. Genootsch.* t. XVII, 2e part., p. 121—135.

[2]) Junghuhn, *Java*, trad. allem., trad. allem., t. II, p. 8.

tallins avec filons de quartz et de porphyre quartzeux, et les phtanites sans filons de quartz, — avaient été retrouvés, les premiers à Java même, les seconds dans les îles du détroit de la Sonde.

Je résolus donc de visiter aussitôt que possible la localité, près de Djasinga, où la présence du granite avait été indiquée par Rigg, et dans les derniers jours du mois d'août je mis ce projet à exécution, en compagnie de MM. les ingénieurs des mines Hooze et Fennema.[1]

Une exploration détaillée ne put toutefois avoir lieu, trois jours seulement pouvant être consacrés à cette première excursion, dont le but était simplement de constater s'il y avait réellement du granite.

Le premier jour nous nous rendîmes de Batavia, par Buitenzorg, à Nangoeng, où nous fûmes accueillis avec la plus grande cordialité par M. P. van Motman, le propriétaire du superbe bien de campagne Nangoeng (nommé proprement Tjoeroek-Bitoeng) et de la terre joignante de Sadieng-Djamboe. Le second jour fut employé à l'excursion au mont Gedéh et au retour à Nangoeng, tandis que le troisième jour nous ramena de Nangoeng à Batavia.

De Buitenzorg (voir la petite carte Pl. II, fig. 3) on suit, dans la direction ouest, la grand'route de Djasinga, en passant par Dramaga, Tjampéa, Lewiliang, et Sadieng-Djamboe, jusqu'à Penjawoengan, où l'on tourne au sud-ouest; pour atteindre bientôt la maison de campagne Nangoeng.

A Tjambéa commence une chaîne d'éminences calcaires (éocènes?), le Goenoeng Tjibodas, qui reste à droite du chemin; le chemin lui-même se maintient constamment sur la pente extrême et très douce du volcan Salak, jusqu'à Penjawoengan. Près de cette localité apparaissent des marnes et des grès, d'un gris plus ou moins foncé; ces grès sont manifestement composés de détritus andésitiques, et appartiennent probablement à l'époque miocène.

Presque tout le terrain compris entre Penjawoengan, Nan-

goeng, Tjisoesoe et Djasinga paraît être formé de ces couches miocènes et de différentes sortes d'andésites, d'origine un peu plus ancienne (miocène inférieur). Il y a absence de roches volcaniques récentes. En revanche, près du mont Gedéh, arrivent au jour quelques roches beaucoup plus anciennes, ainsi qu'il sera dit plus loin.

Nangoeng est relié à Djasinga par un grand chemin, qui se dirige d'abord à l'ouest, puis au nord, en passant par Tjisoesoe. Le village de Tjisoesoe est situé au bord du Tji (rivière)-Manguntun, qui a sa source au mont Gedéh. C'est dans cette rivière et dans un petit affluent à droite, le Tji-Rempaq, que devaient se trouver, d'après Rigg, les blocs de granite. Quant à la roche en place, cet observateur ne l'avait pas découverte.

Dans le lit du Tji-Manguntun nous avons vu, en place, des couches de phtanite compacte, très dur, d'un noir foncé ou d'un gris clair; au confluent du Tji-Rempaq elles ont une direction de 51° et une inclinaison de 23° au N.-O. Elles ne paraissent pas renfermer de filons quartzeux; parmi les cailloux roulés, nous avons bien trouvé un fragment unique de quartz blanc, de la grosseur du poing, mais nous n'avons pas remarqué de filons de cette substance dans les phtanites mêmes.

D'après Rigg, on pourrait suivre ces phtanites jusqu'à une assez grande hauteur sur la pente du Gedéh, dans le lit du Tji-Séroea, autre affluent, que le Tji-Manguntun reçoit à sa droite, plus en amont.

Dans le lit du Tji-Manguntun, on trouve, outre des fragments roulés de phtanite, de gros blocs isolés d'une roche qui réellement ressemble beaucoup à du granite amphibolique. Le quartz, toutefois, y est moins abondant que dans la plupart des granites, et, de plus, les stries fines du feldspath le font reconnaître pour du plagioclase. La roche appartient donc aux *diorites quartzeux*.

Les blocs de diorite se voient dans le Tji-Manguntun même depuis Tjisoesoe jusqu'au confluent du Tji-Rempaq; en amont de ce point, ils cessent de se montrer dans le cours d'eau prin-

cipal, mais on peut les poursuivre dans son affluent, le Tji-Rempaq. Le temps nous a manqué pour remonter ce ruisseau jusqu'à sa source, ce qui d'ailleurs n'aurait été possible qu'en s'ouvrant un chemin dans les broussailles, la hache à la main, tout le mont Gedéh étant couvert d'une épaisse végétation arborescente.

De l'exploration faite par Rigg, il résulte, en tout cas, que le diorite quartzeux ne peut se trouver, au mont Gedéh, sur une grande étendue de terrain; probablement, il ne s'y présente donc que sous la forme de un ou plusieurs filons, plus ou moins épais, dans le phtanite.

Etudié au microscope, le diorite quartzeux montre les éléments suivants: Du feldspath *plagioclase*, en cristaux nombreux, ordinairement transparents, élégamment striés suivant les plans d'hémitropie; une petite partie seulement de quelques cristaux a un aspect trouble. On y voit inclus principalement des grains cristallins vert clair de pyroxène et des matières ferrugineuses opaques. — Du *quartz*, en grains nombreux, hyalins, sans contours cristallins, renfermant beaucoup d'inclusions liquides. — De l'*amphibole*, dont une partie en plaques cristallines compactes, brunes, dont les sections transversales montrent les angles obtus caractéristiques; il y a aussi beaucoup d'amphibole fibreuse, de couleur verte, qui doit probablement naissance au pyroxène. — Du *pyroxène*, en sections assez grandes, d'un vert extrêmement clair; il est toujours transformé en partie en petites aiguilles vert clair d'amphibole (ouralite), qui, par leur décomposition ultérieure, se changent en un agrégat de fibres chloritiques vertes et de lamelles micacées brunes. On ne saurait affirmer, toutefois, que les cristaux de pyroxène, en se transformant, aient toujours passé par le stade intermédiaire d'ouralite; il semble possible qu'ils se soient parfois convertis directement en chlorite. Les parties pyroxéniques transparentes sont faciles à distinguer optiquement, par la valeur plus grande de leur angle d'extinction, des parties amphiboliques auxquelles elles sont intimement unies.— De l'*apatite* limpide, en petits prismes courts et épais, assez

nombreux, très souvent inclus dans l'amphibole. — Quelques petits prismes courts, transparents, colorés en rose très pâle, un peu rugueux à la surface, qui me paraissent être du *zircon*, bien que je n'aie pu trouver de sections transversales quadratiques. — Du *fer titané*, en nombreux cristaux bizarrement déchiquetés, plus ou moins régulièrement hexagones, souvent bordés de titanomorphite (leucoxène) blanche. — De l'*épidote*, comme produit de transformation de l'amphibole. — Enfin de l'ouralite, de la chlorite et du mica, comme produits de transformation du pyroxène.

La roche est, par conséquent, un *diorite pyroxénique quartzeux*.

L'exploration du month Gedéh, près de Djasinga, nous a donc fait découvrir non pas une, mais *deux* roches anciennes (prétertiaires). Il faut maintenant dire un mot de l'âge probable de ces roches, et, pour cela, rappeler d'abord ce que l'on sait des roches analogues de Sumatra.

A Sumatra on trouve deux formations schisteuses: la première en date, qui est ordinairement appelée par nous „formation schisteuse ancienne'', se compose de schistes argileux, de quartzites, de grès (grauwackes) et de quelques autres roches, *sans* fossiles, mais *avec* de nombreux filons de quartz, qui assez souvent renferment un peu d'or. Par son âge, elle appartient à la période silurienne ou à la période devonienne, ou peut-être en partie à l'une et en partie à l'autre. C'est à cette formation schisteuse ancienne, avec filons de quartz, que je rapporte les schistes anciens découverts par M. Fennema au mont Midangan.

La seconde formation schisteuse de Sumatra consiste en schistes marneux et phtanites, qui sont recouverts en stratification concordante par le calcaire carbonifère et que, pour cette raison, je rapporte aux schistes culmiens, bien qu'on n'ait pas trouvé de fossiles dans les schistes mêmes, mais seulement dans le calcaire superposé. Cette formation schisteuse plus jeune se distingue de l'ancienne par l'absence complète de filons de quartz.

Quelquefois, pourtant, les schistes anciens sont aussi dépourvus, totalement ou presque totalement, de veines quartzeuses, et présentent çà et là, sous le rapport pétrographique, une grande

ressemblance avec les phtanites plus récents. On conçoit donc que pour les schistes qu'on trouve ailleurs, non en relation avec le calcaire carbonifère, il ne soit pas toujours possible de décider à laquelle des deux formations en question ils doivent être rapportés.

Une pareille incertitude règne, entre autres, au sujet de l'âge des schistes déjà cités de Teloeq-Betoeng, ainsi que des schistes des îles de Zutphen, du Brabandshoedje, et des phtanites du mont Gedéh.

En ce qui concerne les diorites de Sumatra, on peut remarquer qu'une partie d'entre eux offrent des passages aux granites anciens, lesquels sont incontestablement antérieurs au calcaire carbonifère; d'autres forment des filons dans les granitites, et sont par conséquent plus récents que ceux-ci; quelques-uns sont peut-être même postérieurs au calcaire carbonifère. C'est à ces diorites plus récents qu'appartiennent, entre autres, les diorites quartzeux pyroxénifères, qui, au microscope, montrent une analogie frappante avec notre roche de Djasinga.

Tout ce que nous pouvons donc dire de l'âge des schistes du Tji-Manguntun, c'est *qu'il est à peu près sûr qu'ils ne sont pas plus récents que les schistes culmiens de Sumatra*, *et que peut-être même ils sont plus anciens.*

La supposition qu'ils appartiendraient à la période tertiaire est tout à fait invraisemblable, attendu que, dans les nombreux dépôts éocènes de Sumatra, le phtanite ne se montre nulle part sur une grande étendue, pas plus que le diorite.

La découverte de différentes sortes des roches anciennes à Java jette un jour tout nouveau sur la constitution géologique de cette île.

Jusqu'ici, on avait toujours cru qu'il existait sous ce rapport une grande différence entre Java et Sumatra; maintenant, au contraire, les traits de conformité s'accusent peu à peu, surtout si l'on se rappelle que du gabbro et de la serpentine doivent se trouver près de la baie de Tjiletoek et près de Tjiboelakan. Je n'ai pas encore eu l'occasion de visiter ces points.

Toute la différence entre les deux grandes îles paraît se réduire à ceci: *A Sumatra, et surtout dans les Hauts-Pays de Padang, on trouve à la surface plus de roches anciennes et moins de couches tertiaires; à Java, au contraire, beaucoup moins de roches anciennes et relativement plus de dépôts tertiaires.*

IV. Perlite et roche sphérolithique de l'extrémité sud-ouest de Java (*Java's* 1e *punt*).

Dans le détroit de la Sonde (Pl. II, fig. 2) il y a plusieurs îles, situées en ligne droite, qui sont composées de matériaux volcaniques. Si on prolonge leur alignement au nord, on tombe sur le Radja-Bassa, montagne de la côte de Sumatra; au sud, ce même alignement passe près de l'île du Prince et aboutit au mont Pajoeng, qui s'élève, entièrement isolé, à l'extrémité sud-ouest de Java.

Les centres éruptifs qu'on rencontre sur cette ligne sont les suivants:

1°. *Le Radja-Bassa*, non loin du Varkenshoek. D'après la carte marine, cette montagne, qui s'élève en cône aigu au bord de la mer, a une altitude de 1341 mètres. A ce centre peuvent aussi être rapportées quelques-unes des îles de Zutphen, composées de produits volcaniques récents (d'autres sont formées de phtanites, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus).

2°. *Poeloe-Tiga*: trois îlots à l'ouest de Ketiembang.

3°. *L'île de Séboekoe* n'a pas la forme d'un volcan, mais est formée de conglomérats volcaniques récents.

4°. *L'île de Sébési* est un beau cône escarpé, haut de 859 mètres d'après la carte marine. Il n'est pas improbable que Séboekoe et Poeloe-Tiga doivent naissance à des courants de déjections du volcan Sébési, courants dont certaines parties auraient été changées plus tard, par l'action érosive de la mer, en îles séparées. Dans ce cas, naturellement, ces îles ne seraient pas des centres éruptifs distincts.

5°. *Les îles de Rakáta*, appelées Krakatau par les marins, comprennent, outre Rakáta elle-même, qui est un très beau cône aux pentes rapides, haut de 822 mètres, trois autres îles: le Verlaten eiland, au N.-O. de l'île principale, le Lang eiland, au N.-E., et le Poolsche Hoed, au N.

Ces trois îles sont des portions de coulées de lave du pic Rakáta, dont elles sont maintenant séparées par la mer.

6°. *L'île de Panah Ham* (ou du Prince), grande île située au nord de l'extrémité sud-ouest de Java. Elle est probablement constituée par des roches volcaniques, mais, jusqu'à présent, aucun géologue ne l'a visitée.

7°. *Le mont Pajoeng*, *à Java*. Suivant Junghuhn, ce mont a une altitude de 1450 pieds de Paris = 471 mètres. Il est de forme conique, sans cratère. On ne sait rien des matières qui le composent.

On peut regarder comme appartenant à ce mont le roc, d'une élévation de près de 40 mètres, sur lequel a été construit le phare, haut de 60 mètres, de l'extrémité sud-ouest de Java [1]. Entre cette extrémité et le mont Pajoeng s'étendent toutefois des dépôts tertiaires; le roc en question ne paraît donc pas dépendre d'un courant de lave, en relation directe avec le mont, mais plutôt d'un filon. Du reste, le terrain de cette partie de la côte n'a pas encore été étudié.

J'ai eu l'occasion d'examiner quelques échantillons, rapportés par M. l'ingénieur des mines Hooze, de ce roc de l'extrémité sud-ouest de Java. Les résultats de cet examen seront communiqués tout à l'heure.

Les 7 points qui viennent d'être nommés sont disposés suivant une ligne qui n'est parallèle ni à l'axe longitudinal de Sumatra, ni à celui de Java. Relativement à ces deux îles, la traînée volcanique en question doit être considérée comme une fente transversale, et, géologiquement, elle peut être attribuée à chacune d'elles, avec un droit égal.

---

[1]) Il y a peu de jours, le 1er septembre, ce phare a considérablement souffert d'un tremblement de terre.

Des détails concernant ces points d'éruption et leurs roches seront donnés dans ma „Description topographique et géologique du sud de Sumatra'', qui paraîtra bientot, avec un grand nombre de cartes et de profils, dans l'Annuaire de l'Administration des mines aux Indes Orientales.

Les roches des susdits points d'éruption consistent principalement en andésite pyroxénique et en basalte. A Rakáta on trouve aussi des modifications vitreuses de l'andésite. Ces roches diffèrent peu des produits d'éruption très uniformes que présentent les autres volcans de Sumatra et de Java et qui appartiennent aussi, presque toujours, à l'andésite pyroxénique et au basalte.

Les roches de l'extrémité sud-ouest de Java (Java's 1e punt) sont les seules qui méritent ici une mention spéciale, attendu qu'on n'en a pas encore rencontré de semblables sur d'autres points de l'Archipel Indien.

La *masse principale* du roc qui s'élève à cette extrémité est composée d'une matière vitreuse foncée, dans laquelle on ne distingue, à l'œil nu, que quelques cristaux brillants de feldspath.

Examinée au microscope, la roche offre beaucoup d'intérêt. On y voit disséminés, dans une pâte de couleur claire, des cristaux de plagioclase, de pyroxène, d'amphibole, et un peu de magnétite.

Le feldspath est d'une limpidité extrême et ordinairement en fragments cristallins, qui montrent distinctement les stries plagioclasiques. La sanidine n'y a pas été reconnue d'une manière certaine.

Le pyroxène est d'un vert clair; de fissures perpendiculaires à l'axe $\overset{|}{C}$ partent des fibres parallèles à ce même axe; ces fibres sont pléochroïtes, d'un vert d'herbe lorsque la lumière les traverse parallèlement à $\overset{|}{C}$, et d'un vert brunâtre quand la lumière tombe perpendiculairement à cet axe. Je regarde ces fibres comme formées de substance amphibolique. Comme on observe beaucoup de sections suivant la zone $0\,P : \infty\,P\,\frac{1}{\infty}$, ces pyroxènes

rappellent fortement l'enstatite, qui, en se transformant en bastite, prend la même structure fibreuse. Du reste, on trouve aussi différentes sections, à disposition fibreuse, qui éteignent obliquement et qui doivent par conséquent être monoclines.

L'amphibole, de couleur vert brunâtre, se voit en un assez grand nombre de sections transversales.

La partie la plus remarquable de la roche est la pâte, qui est très abondante. Elle est composée d'un verre limpide, renfermant, en premier lieu, des milliers de baguettes excessivement fines, qui ont tout au plus $0^{mm},015$ de longueur et $0^{mm},001$ d'épaisseur. Ces baguettes sont d'un vert très clair, mais, par suite de leur ténuité, elles paraissent presque incolores, les plus grosses laissant seules apercevoir la couleur. Disposées en traînées, les unes à la suite des autres et les grands axes dirigés dans le même sens, elles donnent à l'ensemble une structure fluidale extrêmement élégante.

En second lieu, on trouve presque partout, dans la base vitreuse, des *joints perlitiques*, qui parfois ont un cours circulaire, rentrant en lui-même, et d'autres fois s'étendent en spirale et forment des courbes non fermées. Les microlithes de la base vitreuse passent sans dérangement d'un côté à l'autre de ces joints, qui sont évidemment des fissures, produites lors du refroidissement du verre.

Entre les nicols croisés, on voit le long de ces fissures une faible polarisation, qui probablement ne doit pas être regardée comme un simple phénomène d'inflexion, mais paraît tenir à la présence de cristaux, peut-être de nature zéolithique, qui se sont séparés de la masse. Par l'effet de cette cristallisation, les fissures perlitiques sont aussi plus ou moins nébuleuses à la lumière ordinaire; près des plus petites d'entres elles, la masse vitreuse est même déjà devenue entièrement trouble et jaune; la polarisation, toutefois, reste extrêmement faible. Le diamètre des grandes perlites est en moyenne de $0^{mm},25$.

La roche est donc un *porphyre perlitique-andésitique.*

Dans la roche principale se trouve, sous forme de *masse*

irrégulière, une matière d'un gris brunâtre ou blanchâtre, dont l'aspect microscopique diffère de celui qui vient d'être décrit. Les lamelles microscopiques montrent les mêmes cristaux disséminés; seulement, il y a très peu de pyroxène. La pâte est, en quelques endroits, semblable à celle de la roche précédente, sauf qu'elle n'est pas traversée de fissures perlitiques et que les microlithes sont transformés en grains noirs. En d'autres endroits, on voit des plages limpides à contours irréguliers, dans lesquelles des zones concentriques et des secteurs se font remarquer par leur couleur jaune clair.

Entre les nicols, on constate que les plages limpides sont composées en partie de grains quartzeux *assez gros* et juxtaposés en grand nombre, mais principalement d'un agrégat de particules quartzeuses *excessivement fines*, qui donnent la polarisation de mosaïque. Sur quelques points, ces particules deviennent si petites que leur nature ne se laisse plus déterminer qu'avec peine; de microcristalline, la pâte devient alors cryptocristalline.

Les secteurs et les segments — parfois des cercles entiers — de couleur jaune clair constituent de très belles felsosphérolites, formées de fibres qui rayonnent autour d'un centre. Souvent on y distingue, en outre, une disposition concentrique, s'accusant par une alternance d'anneaux jaunes et d'anneaux plus clairs, et due probablement à une interruption momentanée des fibres jaunes. Il ne paraît pas qu'on doive y voir des fissures perlitiques.

D'autres parties de la pâte sont brunâtres et troubles, par suite de la présence d'une grande quantité de granules noirs et d'hydrate d'oxyde de fer; ce dernier forme aussi des taches brunes autour des grains de magnétite.

L'aspect de cette roche donne l'idée qu'elle a été fortement influencée par des liquides, qui l'ont pénétrée et modifiée jusque dans ses plus petites particules. Les taches brunes qu'on voit dans la pâte et autour du fer oxydulé, la forme granuleuse et la couleur noire des microlithes de la pâte, peut-être aussi le dépôt du quartz en agrégats microcristallins et cryptocris-

tallins, — tout cela doit probablement être attribué à l'action de liquides, qui ont circulé dans la rétinite après sa solidification.

La roche est un *porphyre rétinitique-andésitique avec sphérolithes*.

Les deux roches qui viennent d'être décrites sont un peu plus acides que la plupart des andésites pyroxéniques et des roches vitreuses de Sumatra, lesquelles ne contiennent ordinairement pas plus de 61 % SiO_2.

D'après l'analyse de M. Cretier, de Batavia,

la *perlite* renferme 69,80 % SiO^2, 1,43 % CaO, 2,00 % Na_2O, pas de K_2O, et jusqu'à 7,37 H_2O;

la *roche sphérolithique* contient encore plus d'acide silicique, environ 72 %, mais, en revanche, seulement 3 % d'eau.

La perlite est jusqu'ici la seule roche vitreuse *hydratée* de l'Archipel indien; toutes les autres rétinites et obsidiennes sont *anhydres*. La forte teneur en eau paraît être favorable à la structure perlitique, et le fait que cette structure n'a été observée dans aucune des autres roches vitreuses tient peut-être précisément à ce qu'elles sont toutes anhydres.

Jusqu'à présent, les roches de la pointe sud-ouest de Java occupent, sous le rapport de leur composition tant microscopique que chimique, une place tout à fait à part parmi les produits volcaniques de l'Archipel indien.

V. Roches leucitiques du volcan Moeriah et du mont Patti-Ajam, dans la résidence de Djapara.

Il y a peu de temps, M. Fennema voulut bien me céder, pour en faire l'étude microscopique, différentes lamelles taillées et polies, provenant de roches qu'il avait rencontrées au cours d'une tournée dans la partie centrale de Java. Pendant ce voyage, dont le but principal était la reconnaissance de la contrée au point de vue de la création de sources artésiennes, M. Fennema

n'avait pas eu le temps de faire beaucoup d'observations géologiques exactes, ni de rassembler une collection d'échantillons de cabinet; mais il avait cherché à y suppléer, autant que possible, en recueillant des éclats de roches non altérés, propres à fournir des préparations microscopiques.

Les échantillons en question proviennent des volcans Moeriah, y compris le mont Patti-Ajam, qui s'y rattache, Merbaboe, Mérapi, Lawoe et Ardjoeno, ainsi que du volcan Lassem, dans la résidence de Rembang, sur la côte nord de Java [1]).

A l'exception des échantillons du Moeriah, tous les autres furent reconnus appartenir à l'*andésite pyroxénique* et au *basalte*.

Ces deux roches paraissent composer en majeure partie les grands cônes volcaniques de l'Archipel indien. A Sumatra, du moins sur la côte occidentale et dans les résidences de Benkoelen et de Palembang, ainsi que dans les districts de Lampong, j'ai trouvé les volcans formés presque exclusivement de ces roches, et d'après les recherches de M. Lorié (*Bijdrage tot de kennis van de Javaansche eruptiefgesteenten*), les échantillons des produits néo-volcaniques de Java, rassemblés par Junghuhn, consistent aussi, à peu d'exceptions près, en basalte et en andésite pyroxénique.

De plus, il résulte de mes observations que, dans l'Archipel indien, il n'existe entre ces deux roches aucune distinction tranchée; elles doivent plutôt être regardées comme des membres *oliviniferes* et *non-olivinifères* de la grande famille des andésites pyroxéniques, membres dont les variétés extrêmes diffèrent sans doute assez notablement en composition chimique, mais sont reliées entre elles par des passages si nombreux et si insensibles, que souvent on est embarrassé de décider si l'on a affaire à une andésite pyroxénique ou à un basalte. Cette difficulté a aussi été ressentie par M. Lorié dans son étude des roches javanaises, et il applique même le nom de basalte à quelques roches absolument dépourvues d'olivine. Mais, si l'on

---

[1]) Le volcan Lassem s'élève, d'après la carte topographique, à 806 mètres.

va jusque là, aucune ligne de démarcation ne peut plus être tracée entre l'andésite pyroxénique et le basalte, car la nature de la pâte et la structure microscopique en général ne sont pas suffisantes comme base de classification. Ce qu'il y de mieux à faire, me semble-t-il, est donc de réserver le nom de *basalte* aux roches dont l'olivine forme un élément essentiel, c'est-à-dire, où elle entre en quantité assez grande. Pour les roches sans olivine on peut alors continuer à employer le nom d'*andésite pyroxénique*, tandis que celles qui contiennent peu d'olivine seront appelées *andésite pyroxénique olivinifère.* Il est clair qu'il restera toujours douteux si certaines roches doivent être rapportées à ce dernier groupe ou bien au basalte, mais, pour ces roches limites, cela est passablement indifférent.

Sous le rapport des caractères microscopiques, les roches volcaniques de Sumatra ressemblent beaucoup à celles de Java; toutefois, il me paraît qu'à Java, surtout dans les parties centrale et orientale de l'île, *prédomine* le basalte, tandis qu'à Sumatra c'est l'andésite pyroxénique qui est la roche dominante.

M. Lorié, par exemple, a trouvé, parmi les roches javanaises de la collection Junghuhn, 34 andésites pyroxéniques et 80 basaltes; il est vrai que quelques-uns de ces derniers pourraient, avec tout autant ou même plus de raison, être rapportés à l'andésite [1]).

Sur la partie de la côte occidentale de Sumatra qui est

[1]) M. Lorié indique, non seulement dans les andésites, mais même dans les basaltes, la présence de la sanidine. Bien que je n'affirme pas que les andésites de Java ne contiennent jamais cette substance. je dois pourtant faire remarquer que M. Lorié rapporte à la sanidine tout feldspath non strié, sans jamais donner la preuve optique de l'exactitude de cette attribution. Ce feldspath peut tout aussi bien être du plagioclase, qui se présente très souvent en section simples ou hémitropes non striées. J'incline à croire que cette supposition se vérifiera pour une grande partie de la sanidine de M. Lorié, d'autant plus que l'existence de la sanidine dans les basaltes (admise aussi, précédemment, par M. Zirkel) est très improbable. — Dans les andésites de Sumatra on trouve, il est vrai, beaucoup de feldspath non strié, mais rarement de la sanidine; aussi les analyses donnent-elles presque toujours très peu de potasse.

comprise entre le lac de Maniendjoe, au nord, et le volcan Talang, au sud, on trouve onze volcans. Sur 97 échantillons de roches de ces volcans, l'examen microscopique m'a fait reconnaître 70 andésites pyroxéniques, 11 andésites pyroxéniques olivinifères, 7 basaltes et 9 roches vitreuses; c'est-à-dire, un rapport tout différent de celui qui vient d'être indiqué pour Java.

Parmi les matériaux des volcans situés dans la région qui s'étend entre Fort-de-Kock et Padang-Sidempoean, il y a aussi beaucoup plus d'andésites pyroxéniques que de basaltes, bien que la différence soit moins grande que dans le cas précédent.

Les roches des volcans de la partie méridionale de Sumatra m'ont fourni, sur 113 échantillons, 88 andésites pyroxéniques et seulement 25 basaltes, de sorte que, là aussi, les produits riches en olivine sont de beaucoup les moins abondants.

Un fait digne de remarque, toutefois, qui se dégage des résultats acquis jusqu'à ce jour, c'est que, dans cet Archipel indien si éminemment volcanique, *les vrais trachytes manquent entièrement*, ou, en tout cas, *ne jouent qu'un rôle très insignifiant.*

L'examen des roches recueillies par M. Fennema m'a donné:

	Andésites pyroxéniques.	Basaltes.
Du volcan Lassem.	2	—
„ „ Merbaboe et de ses alentours	—	8
„ „ Mérapi.	3	—
„ „ Lawoe et de ses alentours. .	15	6
„ „ Ardjoeno et de ses alentours	3	3
Total . . .	23	17

Donc, sur 40 roches, 23 andésites pyroxéniques et 17 basaltes.

Quant aux échantillons du volcan Moeriah et du mont Patti-Ajam, ils montrèrent une composition toute différente, qui les classait parmi les *roches leucitiques*, roches qu'on n'avait rencontrées jusqu'à ce jour, parmi les produits volcaniques de l'Archipel indien, qu'à titre tout à fait exceptionnel.

M. Vogelsang fut le premier qui trouva le leucite dans une

roche extra-européenne, à savoir, dans une roche du mont Bantal-Soesoem, dans l'île Bawéan [1]. La présence de ce minéral a ensuite été signalée encore ailleurs, par exemple dans les roches des Leucite-hills, dans le Wijoming [2]; mais cela n'empêche pas que les roches dont il forme un élément essentiel ne soient restées, en dehors des limites de l'Europe, extrêmement rares.

De Java même, on ne connaissait jusqu'ici que les roches leucitiques du volcan Ringgit, dont la découverte est due à l'étude microscopique, faite par M. Lorié (*l. c.*, p. 247—252), des roches que Junghuhn avait recueillies sur les lieux.

Les nouvelles roches leucitiques, dont il va être question, proviennent, comme je l'ai dit ci-dessus, du Patti-Ajam, contrefort du volcan Moeriah, dans la résidence de Djapara, et de la pente du Moeriah lui-même.

Le Patti-Ajam, situé au nord de la grande route postale qui relie Koedoes à Patti, sur le versant méridional du Moeriah, affecte, sur la carte topographique, la forme d'un fer à cheval, dont l'ouverture est tournée vers le nord; il ne s'élève qu'à 348 mètres au-dessus du niveau de la mer, tandis que le sommet du Moeriah lui-même a une altitude de 1595 mètres.

Les roches leucitiques ne se trouvent pas seulement au Patti-Ajam, mais aussi dans le massif proprement dit du Moeriah, ainsi qu'il appert de l'étiquette de la roche qui sera décrite plus loin sous le nº. 9: „Volcan Moeriah, pente S.-O., au-dessus de Tambaq".

Je n'ai encore pu étudier au microscope que 7 échantillons de ces roches leucitiques; ils sont originaires du Patti-Ajam même, de la pente du Moeriah située au nord du Patti-Ajam, et de la pente S.-O. du Moeriah. Il est possible que des recherches ultérieures, faites sur de meilleurs matériaux, apporteront encore quelques modifications à la description de ces roches.

---

[1]) Voir F. Zirkel, *Neues Jahrbuch für Mineralogie*, 1875, p. 175.

[2]) F. Zirkel, *Ueber die kristallinischen Gesteine längs des 40 Breitegrades in Nordwest-Amerika*, dans: *Berichte d. K. Sächsischen Gesellsch. d. Wissensch.*, 1877.

Les échantillons examinés appartiennent à la *leucitite*, car ils sont composés essentiellement de leucite et de pyroxène. Par le mélange d'un peu de feldspath la roche passe à la *téphrite*, et par le mélange d'un peu d'olivine au *basalte leucitique*.

A l'œil nu, ces leucitites sont des roches de couleur foncée et d'une texture porphyroïde, due à la présence de grands cristaux de pyroxène vert obscur, qui ont assez souvent 2½ à 4 millimètres de longueur. Quant aux cristaux de leucite, comme ils n'atteignent qu'exceptionnellement 0,5 à 0,7 millim., et que le plus souvent ils ne dépassent pas 0,05 à 0,1 millim., il est difficile de les découvrir dans la roche, sans verre grossissant.

Je passe maintenant à la description microscopique des échantillons, que je désignerai par leurs numéros et leurs étiquettes, tels que je les ai reçus de M. l'ingénieur des mines Fennema.

N°. 4. Voir plus loin.

N°. 5. ***Mont Patti-Ajam.*** La pâte de cette roche ne montre, à l'état isolé, que du pyroxène vert, une matière ferrugineuse et quelques sections d'une substance noire et grenue, qui paraît dériver de la phlogopite et s'être formée par la décomposition de ce mineral.

Les cristaux de *pyroxène* présentent des contours très nets et ne sont que très faiblement pléochroïtes, la couleur variant entre le vert jaunâtre et le vert d'herbe. Souvent des bandes vert d'herbe alternent avec des bandes d'un vert très pâle, d'où résulte une structure zonaire fort élégante. La plupart des cristaux de pyroxène sont simples, mais quelques-uns contiennent de une à quatre lamelles minces, à disposition hémitrope. Ces cristaux sont ordinairement riches en inclusions; on y voit notamment toujours un grand nombre de cristaux d'apatite, sous forme de sections hexagones et de longues baguettes, qui souvent présentent des fissures répétées perpendiculairement à l'axe principal.

La plupart des inclusions d'apatite sont limpides; quelques-unes, toutefois, ont un aspect brun poudreux, dû à des interpositions longues et étroites, parallèles à l'axe principal. Parfois

les apatites sont disséminées, dans les cristaux de pyroxène, sans la moindre régularité, suivant des directions quelconques; d'autres fois elles affectent une disposition régulière, parallèle aux contours des sections pyroxéniques. Lorsque la préparation, placée entre les nicols croisés, est tournée de manière que le pyroxène devienne obscur, on voit la plupart des baguettes d'apatite se détacher en couleurs brillantes sur ce fond sombre; quant aux sections d'apatite en hexagones réguliers, naturellement elles sont obscures, et elles le restent dans toutes les positions de la préparation, si elles occupent l'épaisseur entière de la lamelle.

Outre l'apatite, les cristaux de pyroxène renferment aussi quelques lamelles brunes de mica magnésien, partiellement transformées en granulations noires.

Le *minerai de fer*, que la roche contient en gros grains peu nombreux, présente souvent des sections hexagones, d'autres fois des sections octaédriques; il paraît appartenir exclusivement au type régulier, et par conséquent à la *magnétite*. Il n'est pas rare de voir des cristaux d'apatite traversant de part en part les grains de minerai de fer.

La pâte dans laquelle se sont développés ces divers cristaux plus ou moins volumineux est très abondante.

Elle consiste en une masse limpide, ayant tous les caractères d'un verre isotrope et contenant une multitude de grains cristallins de pyroxène, de petits cristaux de minerai de fer et de baguettes de plagioclase. Les grains de pyroxène mesurent rarement plus de 0,04 millim., ceux de minerai de fer n'ont que 0,006 millim. Les petits cristaux de feldspath sont tous étroits, longs de 0,09 millim. au plus, et ordinairement composés de quatre à six lamelles. Je n'ai pu constater d'une manière certaine la présence de la sanidine.

Quant à la matière limpide, qui forme la masse principale de la roche, j'y ai cherché en vain des traces de double réfraction; nulle part, même avec la teinte sensible de la plaque de quartz, je n'ai pu observer la moindre polarisation, de sorte

qu'on serait très enclin à regarder cette matière limpide dominante comme une base vitreuse.

Cette roche, toutefois, accompagne les autres roches décrites ci-dessous, dans lesquelles le leucite apparaît distinctement, mais qui du reste ressemblent tout à fait au N°. 5. En outre, dans quelques parties de la masse limpide, j'ai trouvé de très petits microlithes, qui étaient groupés sous forme de couronne, tout comme on l'observe autour et à l'intérieur des cristaux de leucite. Il est vrai que ces parties ne polarisaient pas la lumière; néanmoins, je regarde la masse limpide comme formée de leucite, à cause des relations qui existent entre cette roche et les suivantes. On sait que souvent des sections de petits cristaux de leucite ne montrent pas non plus la moindre trace de double réfraction.

Si la masse limpide n'était pas du leucite, mais de nature vitreuse, nous aurions ici une andésite pyroxénique d'aspect très particulier, savoir, à base vitreuse très abondante et ne contenant, à l'état isolé, que des cristaux de pyroxène et un peu de mica, mais pas de plagioclase. Or, parmi les centaines d'andésites pyroxéniques de l'Archipel indien que j'ai examinées au microscope, jamais je n'ai rencontré un semblable type.

Bien que la nature leucitique de la masse en apparence isotrope soit ici très probable, il ne faut pas oublier que la preuve optique fait défaut, et que, dans les cas de ce genre, la détermination ne peut souvent prétendre qu'à la valeur d'une opinion subjective; M. Rosenbusch en a déjà fait la remarque, avec juste raison [1]).

Dans la pâte on observe encore, çà et là, des particules d'un blanc trouble ou d'un blanc jaunâtre, faiblement polarisantes, de nature zéolithique, qui proviennent, par transformation, soit du leucite, soit de la néphéline. Il est vrai que la néphéline ne se rencontre pas ici en cristaux; mais souvent cette substance n'existe dans la pâte des roches qu'à un état peu distinct, où elle n'est reconnaissable que par la voie chimique. Si l'on traite,

---

[1]) Rosenbusch, *Mikrosk. Physiographie der massigen Gesteine*, p. 514.

en effet, par l'acide chlorhydrique une lamelle contenant de la néphéline, la masse devient gélatineuse, et, après dessiccation de la gelée, on y observe une multitude de petits cristaux de chlorure de sodium. Ne possédant toutefois, tant de cette roche-ci que des suivantes, qu'un très petit nombre de lamelles, je n'ai pu en sacrifier une seule pour vérifier la susdite réaction.

Le plagioclase ne se montre qu'en très petits cristaux dans la pâte de cette roche; la matière feldspathique y est très subordonnée et en beaucoup trop faible proportion pour que la roche puisse être rangée parmi les téphrites.

La roche est une leucitite.

N°. 6. *Volcan Moeriah, au nord du Patti-Ajam.*

Cette roche fournit de très belles préparations microscopiques. Déjà à la loupe on reconnaît dans les lamelles minces, à côté de grands cristaux verts de pyroxène, mesurant jusqu'à 4 millimètres, une multitude de grains de leucite, limpides, arrondis ou octaédriques; ces grains toutefois n'atteignent que rarement un diamètre de ½ millim. et le plus souvent restent beaucoup au-dessous de cette dimension.

Au microscope, on voit, dans une pâte de couleur sombre, des cristaux isolés de pyroxène, de leucite, de minerai de fer, et, en petit nombre, d'apatite et d'olivine.

Les *cristaux de pyroxène* ressemblent tout à fait à ceux du N°. 5, possèdent une structure zonaire à bandes de couleurs différentes, et renferment aussi une extrême abondance de cristaux d'apatite, et en outre des grains de magnétite. La plupart de ces pyroxènes sont des cristaux simples; néanmoins, on trouve aussi un remarquable exemple de groupement croisé, qui est représenté Pl. I, fig. 4; le cristal *A* est traversé en croix par le cristal *B*; *C* n'est qu'un fragment pressé contre *A*.

Le cristal *A* contient deux segments triangulaires *a . a*, qui sont striés parallèlement aux côtés courts du cristal, tandis que la partie *b . b.* est striée dans le sens des côtés longs, comme l'indique la figure. Quand on fait tourner le cristal entre les

nicols croisés, les trois parties *a.a.* et *b.b.* deviennent obscures *simultanément*, à savoir, au moment où les longs côtés du cristal font un angle de 42° avec une des sections principales des nicols; l'angle aigu du cristal étant de 67°, on voit que la coupe de *A* n'est pas exactement parallèle au plan de symmétrie.

Le cristal *B* présente de même une pièce triangulaire *a'* et deux pièces latérales *b'.b'*, qui sont striées différemment, mais deviennent pourtant obscures toutes ensemble; l'angle d'extinction est ici de 45° et l'angle aigu du cristal de 73°; par conséquent, la section de *B'* n'est pas non plus tout à fait parallèle au plan de symétrie. Lorsque *A* est arrivé à la position d'extinction, il faut encore tourner de 20° pour voir s'obscurcir le cristal *B*. Ce qu'il y a de plus remarquable, toutefois, c'est que, quand on fait tourner la préparation entre les nicols croisés, les parties triangulaires *a.a.* deviennent vertes, les parties *b.b.* rouges ou rouge-jaunâtre, de sorte que ces parties tranchent alors très nettement l'une sur l'autre, non seulement par leur fines stries, mais aussi par leur couleur. Si l'on continue la rotation, toujours entre les nicols croisés, les parties *a.a.* restent vertes et les parties *b.b.* rouges ou rouge-jaunâtre, jusqu'à ce qu'elles redeviennent, toutes ensemble, obscures. — Quelquefois il m'a semblé pourtant qu'il y avait une petite différence dans l'angle d'extinction des parties *a* et *b* du même cristal, mais je n'ai pu la constater d'une manière certaine En tout cas, si une pareille différence existe, elle ne dépasse pas 1 ou tout au plus 2 degrés.

Quelque chose d'analogue a été décrit par M. L. van Werveke [1]) pour de petits cristaux de pyroxène d'une limburgite de l'île de Palma. Seulement, dans ce cas, les quatre quadrants ne s'éteignaient pas tous à la fois, mais deux à deux; la différence dans l'angle d'extinction, pour des sections parallèles au plan de symétrie, était de 10° (voir Pl. I, fig. 5), tandis que, pour le cristal de pyroxène de notre leucitite N°. 6, cette différence est nulle, ou du moins très faible.

---

[1]) *Neues Jahrbuch für Mineralogie*, 1879, p. 483.

Les cristaux de *leucite* sont très abondants dans notre roche; la plupart mesurent de 0,2 à 0,5 millim., rarement ils atteignent un diamètre de 0,6 à 1 millim. Ils sont ordinairement arrondis, quelquefois à section plus ou moins régulièrement octogone, limpides, et assez parcimonieusement pénétrés d'interpositions, qui parfois se groupent sous forme de couronnes. Ces petites couronnes, ou ces petits octogones (fig. 6), sont formées en partie de microlithes pyroxéniques d'un vert très pâle; on trouve, en outre, des inclusions rondes, dont les unes ont un bord obscur et sont probablement des pores remplis d'air, tandis que quelques autres montrent un bord clair étroit et une bulle mobile, ce qui indique des inclusions liquides. Entre les nicols croisés, les leucites montrent très nettement les stries d'hémitropie bien connues, ce qui rend tout à fait impossible la confusion de ce minéral avec d'autres. Souvent les cristaux de leucite sont traversés par des fissures, à partir desquelles commence un trouble de la substance leucitique.

La *magnétite* se présente en sections les unes hexagones, les autres octogones, et elle est traversée par de petits cristaux d'apatite.

L'*apatite* ne forme pas seulement des inclusions dans le pyroxène, mais aussi des cristaux indépendants, tantôt limpides, tantôt troubles et de couleur brune ou grise. Ces cristaux sont ordinairement fissurés parallèlement à o. P. Les sections hexagones troubles peuvent très facilement être confondues avec la néphéline, surtout parce que l'apatite se présente ici assez souvent en petits cristaux courts et épais.

L'*olivine* est rare et sous forme de petites sections rhombiques aiguës, qui ne dépassent pas 0,3 millimètre.

Les cristaux qui viennent d'être nommés sont enveloppés dans une *pâte* composée:

1°. De pyroxène en bâtonnets minces, très nombreux, vert clair, ayant tout au plus $0^{mm},06$ de longueur et descendant jusqu'aux dimensions de grains fins.

2°. De baguettes de plagioclase, également très nombreuses,

longues de 0mm,08 ou moins, ordinairement étroites, les grandes composées de 6 à 8 individus, les petites de 2 à 4. — Je n'ai pas pu reconnaître, d'une manière certaine, la présence de la sanidine.

3°. De leucite en petits grains peu abondants, qui parfois sont encore très distinctement striés. — La plus grande partie du leucite se trouve toutefois, dans cette roche, à l'état de cristaux apparents.

4°. De grains fins de magnétite.

Rien n'indique la présence d'une base vitreuse.

Bien que le feldspath ne figure pas parmi les cristaux apparents de cette roche, parmi ceux qui lui donnent la structure porphyroïde, la pâte contient pourtant, en très petits cristaux, une assez grande quantité de plagioclase. Le roche est donc une *leucitite* se rapprochant des téphrites.

N°. 7. *Volcan Moeriah*, *mont Patti-Ajam.*

Cette roche se distingue de la précédente en ce que le leucite ne s'isole pas en cristaux apparents, mais est entièrement refoulé dans la pâte. Seuls le pyroxène et la magnétite, ainsi que l'apatite montrant des sections hexagones troubles et de couleur brune ou bleue, sont développés en cristaux plus ou moins grands, qui ne diffèrent en rien de ceux des échantillons déjà décrits ci-dessus. — La pâte renferme une très grande quantite de leucite en petits grains polarisants, qui mesurent au plus 0mm,1, et dont quelques-uns possèdent de petites couronnes de microlithes. Mais le leucite s'y trouve aussi comme substratum général, sous la forme d'une masse limpide, isotrope en apparence. Qu'il existe toutefois dans cette roche une vraie base vitreuse, isotrope, c'est ce qui me paraît improbable. Outre le leucite, la pâte contient des baguettes de plagioclase, des petits cristaux de pyroxène, des grains de magnétite et quelques petits prismes d'apatite, comme dans les roches précédentes.

C'est une *leucitite.*

N°. 8. Voir plus loin.

N°. 9. *Volcan Moeriah*, *versant S.-O*, *au-dessus de Tambaq.*

Belle roche, où l'on distingue de grands cristaux de pyroxène

vert d'herbe, des leucites transparents, à contour octogone net et à striure polysynthétique, ayant jusqu'à $0^{mm},5$ de diamètre; de la néphéline en cristaux incolores, courts et épais, à section rectangulaire ou hexagone (fig. 7), atteignant $0^{mm},3$; enfin de la magnétite; — le tout disséminé dans une pâte composée de petits grains de leucite très abondants, à section mesurant en moyenne $0^{mm},03$; de petits cristaux de pyroxène, dont les dimensions s'abaissent jusqu'à celle de microlithes très fins, de $0^{mm},01$ et moins; de magnétite et d'apatite. Il n'y a pas de plagioclase.

Cette préparation est la plus belle de toutes celles que j'ai examinées.

Le leucite entre dans cette roche à la fois en grands cristaux, donnant l'aspect porphyroïde, et comme élément essentiel de la pâte. Les cristaux de néphéline y sont très distincts; on les reconnaît sans peine, non seulement à leur forme, mais aussi à de nombreuses fissures, d'où part un trouble zéolithique (voir fig. 7).

La roche est une *leucitite.*

N°. 10. *Volcan Moeriah*, *mont Patti-Ajam.*

Comme éléments apparents, produisant l'aspect porphyroïde, on ne trouve dans cette roche que le pyroxène et l'olivine. Le premier est en grands cristaux verts, renfermant les inclusions connues d'apatite et de minerai de fer et, çà et là, une lamelle de mica; l'olivine se présente en sections peu nombreuses, larges de $0^{mm},8$, presque incolores, plus ou moins régulièrement oblongues ou rhombiques Les cristaux sont traversés de quelques fissures colorées en vert sombre. Les olivines sont très pures et renferment seulement de petits octaèdres transparents, brun verdâtre, de picotite ou de quelque autre espèce de spinelle; ceux-ci sont plus gros que je ne les ai vus dans aucune autre roche de l'Archipel indien, ils atteignent jusqu'à $0^{mm},03$ de diamètre.

La pâte est composée de leucite, en nombreux petits grains et aussi comme substratum; d'une très grande quantité de pyro-

xène, sous la forme de petits grains cristallins et de microlithes déliés; de magnétite et d'un peu de plagioclase. Les grains de leucite ont ici ordinairement 0mm,05 de grandeur.

La roche est une *leucitite* renfermant quelques grands cristaux d'olivine, et passant ainsi aux basaltes leucitiques.

N°. 11. *Volcan Moeriah*, *mont Patti-Ajam.*

Du pyroxène vert d'herbe, quelques sections presque incolores d'olivine, de la magnétite, de l'apatite et d'assez nombreuses sections, à forme irrégulière, de phlogopite changée en matière grenue noir brunâtre, — tels sont les éléments disséminés dans la pâte de cette roche.

Les cristaux de pyroxène n'ont rien de particulier; ils présentent la structure zonaire, à zones de couleurs différentes.

L'olivine est représentée par des individus peu nombreux, mais de grande dimension (jusqu'à 2 millim.). Ceux-ci ne sont pas transformés en serpentine, mais seulement altérés à la surface, où ils montrent une bordure brune d'hydrate d'oxyde de fer. A l'intérieur des cristaux, le long de fissures, on voit de très nombreuses interpositions brunes, les unes arrondies et à bulle fixe, les autres sous la forme de petits octaèdres rhombiques aigus, dont le grand axe est dirigé perpendiculairement à l'axe $\overset{|}{C}$ du cristal d'olivine. Comme ces inclusions ne sont pas répandues dans toute la masse de l'olivine, mais confinées aux fissures et crevasses, on ne doit sans doute pas les regarder comme de formation primitive; il est probable qu'elles proviennent de la substance même de l'olivine, transformée sous l'influence de liquides qui circulaient à travers les fentes.

Les cristaux de magnétite offrent les apparences ordinaires.

Les cristaux d'apatite sont en partie incolores et en partie d'une couleur brune due à de fines interpositions, qui sont disposées parallèlement à l'axe principal et formées peut-être d'un assemblage de petits grains; ces inclusions donnent aux sections transversales un aspect trouble et grenu. Les cristaux atteignent la longueur considérable de 0mm,75 sur 0mm,08 d'épaisseur; des fissures répétées les divisent perpendiculairement à l'axe principal.

Çà et là seulement j'ai pu découvrir distinctement une section fortement absorbante de mica, au milieu de sections grenues à contours irréguliers, qui consistent en une accumulation de grains de magnétite, entre lesquels on voit du fer oxydé brun en lamelles minces et en taches. Ces sections grenues paraissent provenir ici, comme dans le N°. 5, de phlogopite décomposée. Sur d'autres préparations (voir plus loin) cette transformation est plus facile à suivre.

La pâte de la roche est formée de leucite, de plagioclase, de pyroxène et de magnétite, le tout en petits grains et en petits cristaux, le leucite, de plus, comme substratum isotrope. Les grains de leucite se laissent rarement bien reconnaître ici par la voie optique. Outre les substances qui viennent d'être nommées, on voit encore dans la pâte des taches brunes de fer oxydé et un grand nombre de petits grains bruns translucides, qui ont souvent pour point de départ les cristaux de magnétite et les sections noires et grenues du mica.

La roche est une *leucitite*, que sa teneur en olivine rapproche des basaltes leucitiques.

N°. 12. *Volcan Moeriah*, *mont Patti-Ajam.*

Les éléments disséminés de cette roche sont, comme ceux de la précédente, le pyroxène, très peu d'olivine, la magnétite, l'apatite et des sections de mica transformé en matière grenue noire. Elle renferme toutefois moins d'olivine que le N°. 11. — La pâte est composée de leucite, de pyroxène, dont les grains sont en partie d'une grande ténuité, de magnétite et de très peu de plagioclase. Le leucite ne forme pas seulement un substratum isotrope, mais existe aussi en grains nombreux, qui atteignent jusqu'à $0^{mm},15$ de grosseur et montrent alors encore très souvent la striure polysynthétique.

Leucitite, avec peu d'olivine.

Ce sont là toutes les roches leucitifères de la collection rassemblée par M. Fennema.

Récemment, j'ai encore reçu de M. van Heuckelom, ingénieur

des mines à Samarang, quelques échantillons, qu'à ma prière il avait recueillis au pied méridional, presque plat, du Moeriah, entre cette montagne et le Patti-Ajam. Le Moeriah, en effet, dans la direction sud ou sud-est, s'abaisse d'abord en une plaine légèrement inclinée, qui près du village de Masin n'est qu'à 175 mètres au-dessus du niveau de la mer, pour se relever ensuite, au Patti-Ajam, à une hauteur de 348 mètres; cette dernière éminence descend par une pente très rapide, au sud, vers la grande route de Koedoes à Patti, dont le niveau n'est que de 20 mètres au-dessus de la mer.

M. van Heuckelom rapporte que ni cette plaine, ni le Patti-Ajam, ne présentent de courants de lave, mais seulement de l'argile avec blocs épars, formant quelquefois des couches de conglomérats; les courants de lave, s'il en existe, ne peuvent se trouver que dans la partie du Moeriah située plus haut, partie qui n'a pas encore été explorée. Le Patti-Ajam, d'après M. van Heuckelom, n'est *pas* un point d'éruption indépendant.

Des huit échantillons qu'il m'a envoyés, il y en a 5 (N°. 1 H — 5 H) qui proviennent du dessa de Képangen, où ils ont été détachés de blocs gisant dans la rivière de Gilingan. N°. 6 H provient du dessa de Regoeling (Ngergoeling sur la carte), N°. 7 H de Masin, et N°. 8 H de Soedo.

L'examen microscopique a appris que ces matières appartiennent bien aux roches leucitiques, mais présentent un tout autre caractère que celles décrites ci-dessus. Tandis que ces dernières sont des roches leucitiques contenant du plagioclace comme élément subordonné, les roches de la collection van Heuckelom sont des *téphrites*, ou plutôt des andésites pyroxénifères et amphibolifères, avec une teneur variable en leucite. Parfois ce minéral y entre en proportion notable, d'autres fois il est en quantité très faible et, en outre, difficile à découvrir, à cause de la petitesse des individus leucitiques.

Après avoir étudié ces roches, je suis arrivé à la conclusion que les deux échantillons N°. 4 et N°. 8 de la collection Fennema, originaires du volcan Moeriah, que j'avais rapportés aux andési-

tes, — bien que leur aspect s'éloignât beaucoup de celui des autres andésites et présentât une grande analogie avec celui des roches leucitiques, — sont probablement aussi des téphrites, mais où le leucite est en proportion très faible et entièrement dissimulé dans le substratum isotrope.

En conséquence, je place ici la description de ces deux échantillons, qui ci-dessus ont été omis; viendront ensuite les roches rassemblées par M. van Heuckelom, que je décrirai toutefois aussi brièvement que possible, pour éviter des répétitions.

N°. 4. *Volcan Moeriah* (collection Fennema).

A l'état isolé, on trouve: beaucoup de plagioclase, en cristaux non altérés; peut-être un peu de sanidine; du pyroxène contenant beaucoup d'apatite et tout à fait semblable au pyroxène des roches leucitiques; de la magnétite; de la phlogopite brun clair, distinctement à deux axes.

La pâte est composée de plagioclase, de petits cristaux de pyroxène, de magnétite et d'un minéral zéolithique, blanc jaunâtre, d'aspect trouble, qui est partout répandu entre les cristaux.

Bien que cette roche ne contienne nulle part du leucite dans un état reconnaissable, il faut pourtant remarquer: en premier lieu, la frappante analogie des cristaux de pyroxène avec ceux des leucitites, lesquels présentent aussi des formes parfaitement nettes et renferment de nombreuses inclusions d'apatite; en second lieu, la présence de la phlogopite, minéral que je n'ai encore jamais rencontré dans les vraies andésites pyroxéniques, mais bien dans les roches leucitiques (voir plus loin); enfin, l'élément zéolithique. A raison de ces diverses circonstances, je crois que la roche n'appartient pas aux andésites pyroxéniques, mais doit être regardée comme une *téphrite*, ne contenant du leucite qu'en petite quantité et seulement dans la pâte.

N°. 8. *Volcan Moeriah, au nord du Patti-Ajam* (collection Fennema).

Les éléments disséminés de la roche sont: le pyroxène, avec inclusions d'apatite, le plagioclase, la magnétite et quelques sections de mica altéré et devenu grenu. La pâte consiste en pla-

gioclase, pyroxène, magnétite et une masse isotrope, dans laquelle sont répandues de nombreuses particules troubles, de nature zéolithique. Pas plus que la précédente, cette roche ne laisse distinguer de leucite; néanmoins, et pour les mêmes raisons, je je la rapporte aussi aux *téphrites*.

N°. 1. H. — N°. 5 H. *Volcan Moeriah*, *pente S.-S.-E*, *dessa Képangen*, *rivière Gilingan*.

Ces N^{os} appartiennent (de même que les suivants) à la collection van Heuckelom. Ils ont été pris sur des blocs roulés, épars dans le lit de la rivière En échantillons ordinaires, ce sont des roches gris-verdâtre, à texture finement grenue ou compacte, où l'œil nu ne distingue que des cristaux vert sombre de pyroxène et quelques aiguilles noires d'amphibole. En lamelles microscopiques, ils révèlent les particularités suivantes:

N°. 1. H. Renferme, isolés dans la pâte: Du pyroxène, avec nombreuses inclusions d'apatite. De l'amphibole brun foncé, en grands fragments cristallins et en sections transversales, très fortement absorbante, par suite d'altérations noire et grenue sur les bords et au voisinage des fissures, enveloppant aussi beaucoup d'apatite. Des sections de mica, probablement de la phlogopite (voir plus loin), plus ou moins transformées en matière noire et grenue, les plus petites devenues entièrement grenues et d'un noir foncé; elles ressemblent tout à fait aux sections noires et grenues signalées ci-dessus dans les N°s 5 et 11 de la collection Fennema. Beaucoup de plagioclase, en cristaux nets et bien striés. Quelques cristaux bruns d'apatite. — Toutes ces matières cristallines sont disséminées dans une pâte composée d'une multitude de petits bâtonnets de plagioclase et de pyroxène et de grains de magnétite. Entre ces éléments on voit quelques grains limpides, de 0^{mm},04 de diamètre, qu'il faut probablement rapporter au leucite, bien qu'on n'ait pu y observer ni stries, ni polarisation. Enfin, la pâte renferme en abondance une masse isotrope, au sujet de laquelle on ne saurait décider si c'est une vraie base vitreuse, ou si elle consiste en particules de leucite.

La roche est une *téphrite*, avec faible teneur en leucite.

N°. 2 H. Eléments disséminés: beaucoup de plagioclase, un peu de sanidine, du pyroxène, un peu de mica noir grenu, de la magnétite, et du leucite en individus assez grands, atteignant un diamètre de $0^{mm},4$. — Pâte consistant en particules très ténues de pyroxène, de magnétite et de plagioclase, mêlées d'un peu de masse isotrope, dans laquelle on observe des parties troubles, zéolithiques. — *Téphrite.*

N°. 3 H. Eléments disséminés: du plagioclase; de la sanidine, moins abondante, mais en très beaux cristaux limpides, mesurant jusqu'à 2 millim. et tenant inclus de petits cristaux de plagioclase; de la magnétite, du pyroxène, de l'amphibole, en grands cristaux renfermant de l'apatite. — Pâte composée de bâtonnets de pyroxène, de grains de magnétite et d'une grande quantité de masse transparente et en apparence isotrope, qui est probablement du leucite. — Nulle part, dans cette roche, le leucite n'a pu être reconnu distinctement. — *Téphrite?*

N°. 4. H. Eléments disséminés: amphibole, pyroxène, plagioclase, magnétite, apatite. — Pâte composée de plagioclase, de pyroxène, de magnétite et de petits grains arrondis de leucite, qui toutefois ne polarisent pas; masse isotrope nulle ou en très petite quantité. — *Téphrite.*

N°. 5 H. Eléments disséminés: amphibole, pyroxène, plagioclase, très peu de sanidine, magnétite. — Pâte formée de plagioclase, de pyroxène, de magnétite et de petits grains arrondis de leucite, de $0^{mm},05$ de diamètre, n'offrant de nouveau aucune trace de polarisation. Il y a aussi un substratum isotrope, qui probablement est du leucite. — *Téphrite.*

N°. 6. H. *Volcan Moeriah, près du dessa Régoeling.*

Eléments disséminés: plagioclase, un peu de sanidine, pyroxène, amphibole; quelques rares cristaux d'olivine, presque incolores, mais entourés, par suite d'altération, d'une étroite bordure noire et grenue; de la magnétite; du leucite, en grains atteignant $0^{mm},2$; enfin beaucoup de grandes sections brunes de phlogopite. Les sections hexagonales de cette substance, perpendiculaires à l'axe $\overset{|}{C}$, ne restent pas, entre les nicols croisés, obscures pendant

toute la durée d'une révolution, mais le deviennent seulement 4 fois; l'image axiale montre aussi très nettement que ce mica est à deux axes optiques. La phlogopite présente ici une transformation très remarquable: d'abord il se forme de petites aiguilles brun foncé, qui sont distinctement pléochroïtes et deviennent presque obscures lorsque la lumière les traverse parallèlement au grand axe; je n'ose décider si ces aiguilles sont de l'amphibole, ou une espèce de mica, ou quelque autre minéral; en même temps qu'elles, il se forme des grains ferrugineux. Quand la transformation continue, les aiguilles aussi se changent en matière noire grenue, de sorte qu'alors on ne voit plus que des sections granuleuses, telles qu'il s'en trouve dans la plupart des roches que j'ai décrites; on pourrait les prendre pour de l'amphibole altérée et devenue grenue, mais la plupart, sinon toutes, paraissent provenir de la phlogopite.

La pâte de la roche est composée des mêmes éléments qui viennent d'être nommés, à l'exclusion toutefois de l'amphibole et du mica. Il n'y a pas de base isotrope. — *Téphrite.*

N°. 7. H. *Volcan Moeriah*, *près de Kébon-Agoeng* (*dessa Masin*).

Eléments disséminés: pyroxène, magnétite, apatite, phlogopite en belles lamelles d'un brun clair, montrant distinctement deux axes optiques; peu de plagioclase et encore moins de sanidine.

La pâte est très riche en olivine transformée en une matière vert terne, rouge brunâtre ou blanc terne; souvent l'olivine est encore reconnaissable à ses formes cristallines, mais il ne reste plus trace de substance non altérée. Les autres éléments de la pâte sont le pyroxène, la magnétite, beaucoup de leucite, en grains mesurant jusqu'à $0^{mm},07$, et le plagioclase. Il n'y a pas de base isotrope. — *Leucitite*, qu'on pourrait au besoin appeler un *basalte leucitique.*

N°. 8 H. *Volcan Moeriah*, *près de Soedo* (*dessa Masin*).

Eléments disséminés: pyroxène, magnétite, quelques sections de phlogopite devenue grenue par altération, peu de plagioclase. — La pâte contient beaucoup de leucite, dont les grains atteignent

$0^{mm},15$, du plagioclase, du pyroxène, de la magnétite et de l'apatite. — *Téphrite* [1]).

En embrassant maintenant dans son ensemble la description des roches leucitiques du Moeriah, on est frappé de la grande différence de composition qu'elles présentent. Quelques-unes contiennent beaucoup de leucite, d'autres peu; quelques-unes peu de plagioclase, d'autres beaucoup; un petit nombre contiennent de l'olivine, mais la plupart en sont dépourvues. Pétrographiquement, les unes appartiennent aux leucitites, d'autres aux basaltes leucitiques, et d'autres encore aux téphrites, dans lesquelles le leucite n'entre parfois que pour une proportion très faible, ou même tout à fait problématique.

Si l'on veut avoir un *nom collectif* pour les roches du Moeriah, le mieux est certainement d'en faire des *téphrites*, passant par la diminution progressive du leucite à des andésites pyroxéniques et amphiboliques (toutefois avec habitus spécial), par la diminution du plagioclase à des leucitites, et par l'apparition de l'olivine à des basaltes leucitiques.

Comme il n'est pas probable que le Ringgit et le Moeriah soient, à Java, les seuls points où il existe du leucite, on peut s'attendre à trouver aussi des roches leucitiques ailleurs, notamment entre les deux montagnes qui viennent d'être nommées. Les deux échantillons du mont Lassem, situé à l'est du Moeriah, dans la résidence de Rembang, sur la côte septentrionale de Java, sont, toutefois, des andésites pyroxéniques ordinaires.

Conclusion.

Si l'on prend en considération que l'Administration des mines n'a pas encore commencé l'exploration géologique régulière de

[1]) Un dernier envoi, par M. van Heuckelom, de roches provenant de la pente S.—O. du Moeriah, au-dessus de Tambaq, comprend des téphrites à beaux cristaux *macroscopiques* de leucite; ces cristaux atteignent jusqu'à 10 millim. de diamètre.

Java, que les découvertes ci-dessus mentionnées ne sont pas le résultat d'une étude méthodique, mais ont été faites pour ainsi dire en passant, et sont même dues en partie au hasard, on pourra se faire une idée de l'état d'imperfection où se trouve encore notre connaissance géologique de l'île.

L'ouvrage de Junghuhn conservera toujours de la valeur, mais n'a posé que les premiers jalons. Nous ne croyons pas être injuste envers le savant naturaliste, en disant que ses recherches n'ont dévoilé la constitution géologique de Java qu'en ses traits généraux et, par la nature même du sujet, d'une manière incomplète.

De quelque côté qu'il se dirige, l'observateur géologue rencontre à Java des faits nouveaux, des faits imprévus et intéressants. On peut affirmer que les notions déjà acquises sont peu de chose en comparaison de celles qu'il reste encore à recueillir.

Une décision récente du Gouvernement a ordonné l'exécution du levé géologique de l'île. Deux circonstances viendront en aide dans ce travail. La première, c'est qu'on possède maintenant, pour la plupart des résidences, de nouvelles cartes topographiques à l'échelle de 1 : 100,000, et que des cartes encore plus détaillées, à l'échelle de 1 : 20,000, seront mises à la disposition du corps des mines. En second lieu, l'exploration géologique de Java bénéficiera de toute l'expérience acquise, durant les dernières années, par l'étude des terrains de Sumatra.

On est donc en droit d'espérer que le travail projeté avancera avec rapidité et fournira d'importants résultats. Que ces résultats, outre leur valeur scientifique, pourront aussi avoir une grande utilité pratique, c'est ce que j'ai déjà fait ressortir dans plusieurs occasions antérieures.

BATAVIA, le 16 septembre 1880.

SUR LA

CRISTALLISATION DU DIAMANT,

PAR

E. H. VON BAUMHAUER.

Je me propose de donner ici un premier aperçu du résultat de quelques recherches sur la cristallisation du diamant, recherches faites de concert avec M. le professeur H. Behrens de Delft, et que nous nous réservons de publier plus tard avec tous les détails nécessaires.

Le diamant, comme on sait, cristallise dans le système régulier. Gustave Rose, qui dans les dernières années de sa vie s'était occupé de l'étude des formes cristallines de cette substance, et dont le travail a été publié, après sa mort, par M. H. Sadebeck, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1876, est arrivé à la conclusion qu'on trouve chez le diamant les sept formes holoédriques du système régulier: l'octaèdre, l'hexaèdre, le docécaèdre, l'icositétraèdre, le triakishexaèdre et l'hexakisoctaèdre, ainsi que leurs combinaisons; l'icositétraèdre, toutefois, ne se rencontre que très rarement bien développé dans les faces des cristaux. Cette grande variété de formes cristallines, combinée avec la circonstance que les faces de clivage appartiennent toujours et exclusivement à l'octaèdre, est très caractéristique pour le diamant; aucun autre minéral ne la présente au même degré.

G. Rose croyait que le diamant affecte aussi des formes hémiédriques, c'est-à-dire, celle du tétraèdre, mais M. Sadebeck ne peut partager cette opinion et présume que le savant minéralogiste, s'il avait pu continuer ses recherches sur le mode de formation des cristaux du diamant, aurait fini par reconnaître que ce corps n'existe dans la nature qu'à l'état holoédrique. Ainsi que M. Sadebeck le remarque avec raison, il faut joindre à l'observation des formes extérieures l'étude de la cristallotectonique des matières considérées, si l'on veut acquérir des notions exactes au sujet des lois de la cristallisation.

C'est sur cette cristallotectonique, en d'autres termes sur la structure des grands cristaux résultant du groupement divers de cristaux plus petits, de sous-individus, que nous avons surtout porté notre attention, et nous avons étudié à ce point de vue, non seulement le diamant bien cristallisé, mais aussi les deux autres variétés que ce minéral présente, à savoir, le bort, à formes ordinairement globuleuses, et le carbon ou carbonado, qui à l'œil nu paraît amorphe.

Pour ce qui regarde la manière dont les différentes formes dérivées qu'on rencontre chez le diamant peuvent s'être produites par l'accroissement de l'octaèdre, selon que cet accroissement a voilé plus ou moins complètement les faces de la forme primitive, c'est un point que Rose et Sadebeck ont parfaitement exposé, et sur lequel nous n'avons donc pas à revenir. Mais nous ne pouvons partager leur opinion en ce qui concerne l'accroissement du diamant par emboîtement successif, emboîtement que rien ne prouve, et qui est au contraire formellement contredit par le clivage, possible seulement suivant les faces de l'octaèdre. Si l'on s'en rapportait uniquement à l'aspect extérieur, on devrait aussi admettre une structure testacée chez certaines pyrites, bien que, sur la cassure, elles ne montrent aucune trace de couches concentriques, pas plus que le diamant. Il en est tout autrement de certains cristaux de quartz, où ce mode d'accroissement est nettement accusé, aussi dans la cassure.

Chez le diamant, au contraire, l'accroissement se fait par le

dépôt régulier de cristallites, ou sous-individus, sur les faces du cristal, comme le prouvent les beaux dessins réguliers qu'on observe parfois sur les faces des diamants naturels et qui font songer aux figures de Widmanstätter. Grâce à l'obligeance de M. S. Baszanger, joailler à Amsterdam, nous avons pu examiner un superbe octaèdre naturel, pesant plus de 55 karats, qui est très remarquable par l'application sur l'une de ses faces d'autres petits cristaux de diamant, moins bien conformés, ainsi que de grains de bort; sur une autre des faces de l'octaèdre, les dessins réguliers qui résultent de cette disposition sont déjà visibles à l'œil nu. Non moins instructif, sous ce rapport, est un petit diamant maclé ne pesant que 0,1345 gr., long de 7,5 mm., large de 5 mm. et haut de 2 mm., dont je suis redevable à l'amitié de M. A. Daniels, directeur d'une des plus importantes tailleries d'Amsterdam; sur cet échantillon, les dessins, du reste entièrement semblables aux précédents, ne se distinguent qu'à la loupe, mais ils existent sur toutes les faces des deux cristaux combinés. Ils se présentent généralement sous la forme de triangles équilatéraux, ou de triangles tronqués aux sommets et passant parfois à des hexagones réguliers, comme le montrent les figures 1 et 2 de la Planche III, à un grossissement de 10 diamètres, et la Planche IV, reproduisant une partie minime de la surface à un grossissement de 200 diamètres. Les mêmes figures se voient parfois sur les faces de clivage du diamant (la fig. 3 représente une pareille face au gross. $^{10}/_{1}$), et assez habituellement à la surface des diamants, bruts ou taillés, qui sont devenus ternes après avoir subi un commencement de combustion à l'air ou dans l'oxygène. Dans les figures triangulaires, tous les côtés sont orientés vers les arêtes du cristal.

Les assemblages de cristallites, qui donnent lieu à ces figures, forment le plus souvent des creux à parois en gradins et à fond plat; quelquefois aussi, quoique rarement, les cristallites s'élèvent en saillie au-dessus de la surface générale. La production de ces concavités et convexités s'explique simplement par l'insuffisance ou la surabondance des sous-individus octaédriques qui, par leur

agrégation, constituent les grands cristaux. Lorsque des sous-individus octaédriques forment saillie, chacun d'eux doit avoir sa face proéminente parallèle à la face générale dont il fait partie; si, au contraire, il manque quelque part un certain nombre de sous-individus, le fond de la cavité qui en résulte devra correspondre à la face inférieure d'un d'entre eux, et par suite avoir une position symétrique relativement à la face du cristal.

Sur des faces appartenant au cube, on trouve parfois, bien que très rarement, des carrés, qui toutefois ne doivent pas être attribués à des cristallites cubiques, mais à des sous-individus octaédriques, dont ces carrés représentent les sommets, de même que les triangles correspondent aux faces. La fig. 4 montre une des faces d'un petit cube, ne pesant que 0,013 gr. et dont le côté n'a que 1^{mm},75.

Je citerai, comme très remarquables sous ce rapport, deux cristaux appartenant à M. Daniels, dans lesquels on voit des trous carrés qui traversent l'échantillon de part en part. L'un des cristaux a trois de ces perforations complètes, communiquant entre elles, et, en outre, trois cavités pyramidales moins profondes; nulle part on ne découvre des traces de cassure. Les trous sont à section exactement carrée, de 0^{mm},056 de côté pour l'un, et de 0^{mm},7 pour l'autre; tout autour, on voit une multitude de petits gradins, qui se coupent à angles droits, et quelques fossettes pyramidales à base carrée. Les mêmes caractères s'observent dans les cavités qui ne percent pas d'outre en outre.

Considérons maintenant les deux autres états sous lesquels se trouve le diamant, à savoir, le bort, de forme sphéroïdale, et le carbon, d'apparence amorphe.

La forme sphéroïdale du bort a été attribuée par quelques-uns à la même cause qui a donné naissance aux cailloux roulés, c'est-à-dire à l'usure par transport dans l'eau; en ce cas, les diamants auraient dû s'user par leur frottement mutuel, puisque ce minéral n'est entamé par aucune autre matière connue.

Mais, en examinant la surface du bort au microscope, à la

lumière réfléchie, on y découvre une cristallisation extrêmement fine; l'image (fig. 5) de la surface d'un bort translucide sphéroïdal, vu sous un grossissement de 50 diamètres, à la lumière incidente, rappelle exactement les dessins en forme de fortifications que montrent certaines agates. L'extrême dureté du bort, supérieure en apparence à celle du diamant régulièrement cristallisé, est en relation directe avec sa structure; elle tient uniquement à la cristallisation confuse du bort, qui, pour cette même raison, n'est pas susceptible de clivage. La différence entre le bort et le diamant bien cristallisé est la même que celle qui existe entre la calcédoine et le cristal de roche, et tous ceux qui ont eu à travailler ces deux dernières substances ont pu se convaincre que la calcédoine est beaucoup plus difficile à user que le quartz en cristaux. Ici, toutefois, on opère avec la poudre d'émeri, matière plus dure que le quartz; or, comme on ne possède pas de matière à polir plus dure que le diamant lui-même, il est clair que le bort ne se laissera pas user sur le disque d'acier couvert de poudre de diamant. L'égriseur qui, en frottant deux diamants l'un contre l'autre, doit enlever les sommets pyramidaux des octaèdres, pour obtenir la table et la culasse du brillant, et le polisseur, qui doit ensuite donner le fini à ces surfaces, savent très bien, par expérience, que ce travail est infiniment plus pénible que celui qui s'exécute sur les faces de l'octaèdre. Ils doivent alors, selon leur expression, travailler *contre la croissance*; un polisseur novice, qui n'est pas encore suffisamment familiarisé avec la croissance, détériore souvent en un jour, par les sillons qu'il y creuse, sa meule d'acier, tandis qu'un ouvrier habile peut continuer à s'en servir pendant des semaines entières.

Pour ce qui regarde le carbon, il se présente, comme je l'ai déjà fait remarquer en 1873, à des états très différents: quelquefois sa cassure est encore assez cristalline, d'autres fois elle paraît, à l'œil nu, compacte, terne, avec quelques points brillants çà et là, et avec un grand nombre de pores, d'où s'échappent beaucoup de bulles d'air quand l'échantillon est chauffé

dans l'eau. A ma prière, M. Daniels avait fait essayer d'obtenir par la taille une mince lamelle de carbon, qui pût être étudiée au microscope, à la lumière transmise; mais cette tentative a échoué, pour la raison déjà dite à propos du bort: le carbon ne se laisse pas tailler, mais creuse profondément la meule. En examinant toutefois au microscope, comme l'a fait M. Behrens, les bords aigus d'éclats de carbon, on reconnaît qu'il est formé d'une agrégation confuse de petits cristaux. La variété peu colorée, de teinte grise, consistait presque entièrement en cristaux microcopiques de diamant transparent et généralement incolore. La variété brun foncé ne montre que peu de grains incolores, un peu plus de grains jaunes et quelques-uns de couleur bleue; la plupart de ces grains sont troubles, par suite de la présence d'une foule de petits points opaques, extrêmement fins, qui dans la variété grise se rencontrent en proportion beaucoup moindre. Dans la variété brune, les grains sont aussi beaucoup plus arrondis, moins bien cristallisés, et enveloppés d'une matière brune, qui consiste, comme je l'ai constaté dès 1873, en hydrate d'oxyde de fer et en chaux. La variété grise a une structure poreuse, analogue à celle de la lave; la variété brune est plutôt schistoïde. Le rapport du carbon au diamant bien cristallisé peut donc être assimilé à celui qui existe entre le grès et le cristal de roche.

Finalement, je noterai encore que nous avons rencontré un échantillon de carbon brun se terminant d'un côté en une sphère, qui, bien que noire et opaque, ressemble tout à fait à une sphère de bort et au microscope, sous un grossissement de 50 diamètres et à la lumière réfléchie, révèle une superbe structure cristalline, dont l'aspect est exactement le même que celui des arborisations du givre sur les vitres de nos fenêtres (fig. 6). Evidemment, il y a ici transition du carbon au bort.

Les présentes recherches confirment donc pleinement mon opinion antérieure, à savoir, que le diamant bien caractérisé, le bort et le carbon ne diffèrent entre eux que par une cristallisation plus ou moins parfaite, et passent l'un à l'autre par degrés insensibles.

ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

CONTRIBUTIONS

à L'HISTOIRE DU DÉVELOPPEMENT DES

PLAGIOSTOMES,

PAR

C. K. HOFFMANN.

Durant mon séjour à la station zoologique de Naples, où je me suis occupé principalement de l'histoire du développement des poissons osseux, j'ai en outre profité de l'occasion pour apprendre à connaître par moi-même le développement de quelques poissons cartilagineux (*Pristiurus*, *Scyllium*, *Torpedo*, *Mustela*), afin d'employer cette connaissance comme point de départ et de comparaison dans l'étude si compliquée et si difficile de l'histoire du développement des poissons osseux. Les résultats de ces recherches sur les poissons cartilagineux ne font, en général, que confirmer les brillants travaux de M. Balfour; pour un petit nombre de points secondaires, seulement, je suis arrivé à des conclusions un peu différentes, ainsi qu'on le verra par les détails que je vais donner.

Suivant M. Schenk [1]), dans l'œuf du *Raja quadrimaculata*, le vitellus formateur et nutritif est entouré „d'une mince mem-

[1]) Schenk, *Die Eier von* Raja quadrimaculata *innerhalb der Eileiter*; dans: *Sitzb. der Kaiserl. Akad. der Wissenschaften. Math.-Naturw. Classe*, t. LXVIII, 1ère Sect. (1874), p. 363.

brane amorphe, qui, à la plus légère atteinte mécanique, se déchire et laisse échapper le contenu vitellin."

Par contre M. Balfour [1]), d'accord en cela avec M. Leydig [2]), dit: „je n'ai pu découvrir aucune trace de cette membrane, et, de même que M. Leydig, j'en nie l'existence" (chez *Syllium* et *Pristiurus*).

Mes observations, toutefois, confirment celles de M. Schenk. Chez *Pristiurus*, une fine membrane enveloppe réellement l'œuf tout entier; elle est extrêmement délicate, se déchire au moindre contact, et n'est restée préservée que dans deux de mes préparations d'œufs et d'embryons. Son épaisseur est de $0^{mm},0045$; sur des coupes transversales de préparations conservées dans l'acide picro-sulfurique de Kleinenberg, elle montre distinctement une structure à stries concentriques très fines. En revanche, il ne m'a pas été possible d'y reconnaître, avec une certitude suffisante, les pores ou canalicules fins radiaires. Il n'est guère douteux que cette membrane ne soit une vraie membrane vitelline, l'homologue de la zone radiée des poissons osseux (voir Pl. V, fig. 1).

M. Schenk s'exprime ensuite dans ces termes: „En même temps que le vitellus formateur s'aplatit, nous observons — avant le début du sillonnement — que sa masse finement granuleuse, qui jusqu'ici ne laisse pas voir de cellules, se dispose en deux couches. Ces deux couches représentent encore le germe non sillonné. Il s'en faut donc de beaucoup que cette disposition de la masse vitelline puisse être regardée comme correspondant en quelque sorte à l'ébauche des feuillets embryonnaires. Entre les deux couches séparées du germe on voit une fente, qui occupe un espace plus ou moins grand, suivant le stade de développement, antérieur au sillonnement, qu'on a sous les yeux. Cette fente, dirigée transversalement sur la coupe (?), est l'origine de la cavité autour

[1]) F. M. Balfour, *A Monograph of the development of elasmobranch Fishes*, 1878.

[2]) Leydig, *Zur mikrosk. Anatomie und Entwickelungsgeschichte der Rochen und Haie*, 1852.

de laquelle se rangeront les premiers produits du processus de sillonnement. On doit y voir le rudiment de la cavité de segmentation. Les deux couches du germe non sillonné doivent alors être regardées comme les masses qui, déjà séparées dans des stades antérieurs par la fente en question, plus tard, lors de la segmentation, entoureront, sous la forme de segments plus ou moins volumineux, l'une comme toit, l'autre comme plancher, la fente devenue cavité de segmentation. La seule différence entre l'œuf du *Raja quadrimaculata* et celui d'autres animaux consisterait en ce que, chez ceux-ci, la cavité dite de segmentation n'apparaît qu'entourée déjà des globes de segmentation, tandis que, chez le *Raja*, nous voyons la masse vitelline non encore sillonnée s'ordonner autour de la fente, première ébauche de la cavité de segmentation".

Bien que M. Balfour, ainsi qu'il le déclare lui-même, n'ait pas eu l'occasion d'étudier l'œuf (fécondé) avant le début du sillonnement, il est pourtant amené — par ses observations sur les premiers stades de la segmentation — à conclure „qu'aucune division n'existe dans le disque germinatif après le commencement de la segmentation, et que la cavité découverte par Schenk ne peut avoir le moindre rapport avec la cavité de segmentation". M. Balfour pense que la cavité décrite par M. Schenk est un produit artificiel.

Pas plus que M. Balfour je n'ai pu trouver cette cavité, ni dans les germes de *Pristiurus* et de *Scyllium*, ni dans ceux de *Torpedo* et de *Mustela*, quoique j'aie examiné, sur de minces coupes transversales, un assez grand nombre de ces germes, à divers stades de la segmentation et même à une période de développement très peu avancée. Personnellement, j'ai donc aussi acquis la conviction que, dans les germes bien conservés, une pareille cavité n'existe pas. Le même résultat a été obtenu par M. Schultze [1]. Quant aux recherches de M.

[1]) A. Schultze, *Beitrag zur Entwickelungsgeschichte der Knorpfelfische*, dans: *Archiv für mikrosk. Anatomie*, t. XII (1877), p. 465.

Gerbe [1]), je n'ai pu malheureusement en prendre connaissance, sauf par la communication sommaire insérée dans le *Journal de l'anatomie et de la physiologie* de Robin (1872) p. 609. Cette communication montre que M. Gerbe a très exactement observé et décrit les phénomènes extérieurs de la segmentation, mais elle laisse dans le doute sur le point de savoir s'il a aussi examiné les germes sur de minces coupes transversales.

Du processus même de la segmentation, M. Balfour a donné une description si exacte, que je n'ai rien à y ajouter. La fig. 2 (Pl. V) représente une coupe transversale d'un germe de *Torpedo*, pris à un stade assez primitif du développement. Dans ces germes de *Torpedo*, les globes de segmentation avaient un diamètre de $0^{mm},10$ à $0^{mm},12$; la plupart laissaient voir un noyau, dont le diamètre mesurait 0,021—0,022 mm.

Vers la fin de la segmentation, la couche externe des cellules blastodermiques commence à se différencier des cellules sous-jacentes, et forme ainsi, comme l'a montré M. Balfour, le rudiment de l'ectoderme (*epiblast*, Balfour). Les cellules de l'ectoderme prennent une forme cylindrique, ce qui les distingue nettement des autres cellules du germe (*lower layer cells*, Balfour). De même que M. Balfour, j'ai trouvé que les cellules de l'ectoderme ne forment jamais plus d'une seule couche, tant chez *Pristiurus* et *Scyllium* que chez *Mustela*.

A ce moment, où la segmentation s'achève, le germe commence à devenir asymétrique; il est facile de s'assurer de ce fait, déjà décrit par M. Balfour, sur des coupes menées par l'axe longitudinal, ou parallèlement à cet axe. L'asymétrie provient de ce que le germe grossit à l'un des bouts tandis qu'il s'amincit à l'autre, et il en résulte, comme l'a remarqué M. Balfour, qu'on peut distinguer au germe une partie embryonnaire et une partie non embryonnaire. Selon toute apparence, l'épaississement du germe à l'extrémité embryonnaire a pour

[1]) Z. Gerbe, *Recherches sur la segmentation de la cicatricule et la formation des produits adventifs de l'œuf des Plagiostomes et particulièrement des Raies*. Avec 23 planches.

cause unique un déplacement des cellules vers cette extrémité.

Il n'y a, en ce qui concerne la segmentation, qu'un seul point sur lequel je ne puis me ranger à l'avis de M. Balfour. De sa description et des figures qui l'accompagnent, il ressort suffisamment que M. Balfour a déjà vu et connu les changements très remarquables que les noyaux subissent lorsqu'ils se préparent à la division. Ses „*cone-like bodies*" ne sont sans doute que des noyaux devenus fusiformes. Cela s'applique non seulement aux noyaux des cellules blastodermiques, qui peuvent être désignées ici, tout comme chez les poissons osseux, sous le nom d'*archiblaste*, mais aussi aux noyaux existant dans la couche du vitellus nutritif sur laquelle repose l'archiblaste et qui est riche en protoplasma et en globules vitellins excessivement ténus. Cette couche fait partie du vitellus nutritif proprement dit, et, conjointement avec celui-ci, elle peut recevoir, de même que chez les poissons osseux, le nom de *parablaste.* Le fait que des noyaux libres se rencontrent aussi dans le parablaste, tout comme chez les poissons osseux, était déjà connu de M. Balfour, car il dit expressément: „je trouve que des corps de cette espèce", c'est-à-dire des corps en forme de cônes, „existent dans le vitellus tout à fait en dehors du disque germinatif". Au sujet de l'origine de ces noyaux libres chez les poissons cartilagineux, je ne puis rien affirmer, mais on connaît maintenant leur genèse chez les poissons osseux [1]), et il ne me semble guère douteux que ce qui est vrai de ceux-ci s'appliquera aussi aux autres.

Selon M. Balfour, les cellules blastodermiques ne proviendraient pas uniquement de la segmentation de l'archiblaste, car, dit-il, „les segments du disque germinatif deviennent de plus en plus petits par des divisions répétées; mais, outre ce mode de multiplication, il s'opère maintenant, en dehors du disque germinatif, une segmentation du vitellus, et les nouveaux segments ainsi formés aux dépens du vitellus s'ajoutent à ceux qui existent déjà dans le disque germinatif".

[1]) C. K. Hoffmann, *Vorläufige Mittheilung zur Ontogenie der Knochenfische*. dans: *Zool. Anzeiger*, N°. 70 et N°. 71 (1880).

Sur ce point, toutefois, je ne puis pas me rallier à l'opinion de M. Balfour. Sans avoir multiplié outre mesure les recherches, j'ai pourtant étudié les coupes transversales d'un assez grand nombre de germes; or il m'a toujours paru que les cellules blastodermiques dérivent exclusivement de l'archiblaste, comme chez les poissons osseux, que le parablaste ne participe en rien à leur formation, et que, la segmention achevée, l'œuf se compose d'un très grand nombre de cellules blastodermiques, l'archiblaste segmenté, et d'une cellule multinucléée unique, le parablaste.

Chez les poissons cartilagineux il est encore plus facile que chez les poissons osseux de montrer que le germe augmente de volume et de masse pendant le processus de la segmentation; cela n'étant possible que par l'absorption de matériaux nutritifs, il en résulte que, dans ce groupe, le rôle des noyaux libres du parablaste sera aussi, très probablement, le même que dans celui des poissons osseux.

M. Schultze [1]) a également constaté l'existence de noyaux libres dans le vitellus nutritif, et il en donne la description suivante: „Déjà vers la fin de la segmentation, et avant l'apparition des premiers interstices cellulaires du germe, on voit, dans le vitellus finement granuleux qui est contigu aux cellules blastodermiques, une multitude de noyaux libres, les uns isolés, les autres réunis en groupes, et la plupart en voie de segmentation; ils sont situés tout près de ce qui sera plus tard le fond de la cavité blastodermique, et de là pénétrent, sous forme de bourgeons, dans le vitellus. La masse vitelline finement granuleuse, qui entoure immédiatement les noyaux, commence à se liquéfier à partir du fond de la cavité blastodermique, et forme ainsi le protoplasma cellulaire dans lequel on les trouve plongés, soit isolés, soit réunis plusieurs ensemble. Pour ce qui regarde la genèse de ces productions, si l'on considère qu'elles apparaissent d'abord au contact des cellules blastodermiques les plus inférieures et qu'elles se divisent et se multiplient progressivement vers le

[1]) Schultze, *l. c.*, p. 470.

centre de l'œuf, on ne peut guère s'empêcher de croire que les noyaux libres les plus voisins de la face interne du blastoderme sont dérivés, par voie de division ou de gemmation, des noyaux des cellules de segmentation". Pour distinguer les cellules ainsi formées d'avec les vraies cellules blastodermiques, M. Schultze les appelle „cellules blastodermiques secondaires".

Il est à peine besoin de dire que je n'admets pas l'origine assignée par M. Schultze aux noyaux en question. De plus, je n'ai jamais vu une accumulation de protoplasma autour de ces noyaux; en d'autres termes, je ne les ai jamais vus, pas plus que chez les poissons osseux, se transformer en cellules blastodermiques. Les noyaux que j'ai observés étaient toujours libres, souvent rapprochés entre eux et très fréquemment en voie de division. M. Balfour aussi conteste la différenciation de ces noyaux en cellules.

Chez *Pristiurus* et *Scyllium*, le germe se distingue, comme on sait, par sa couleur orange; celui du *Mustela laevis* est coloré en gris sombre, ou même noirâtre.

Un peu après la fin de la segmentation, et environ dans le même temps où l'extrémité postérieure (embryonnaire) du germe grossit, on voit se former dans la partie antérieure (non embryonnaire) la cavité de segmentation. Sur des coupes transversales, on reconnaît que le toit de cette cavité, outre l'ectoderme très nettement différencié et formé d'une seule assise, comprend une épaisseur de plusieurs assises de cellules blastodermiques non encore différenciées (*lower layer cells*: Balfour); quant au plancher de la cavité, il est formé par le vitellus nutritif. Celui-ci, toutefois, ne constitue pas à lui seul le susdit plancher, car on y rencontre toujours encore quelques cellules blastodermiques disséminées, qui souvent attirent l'attention par leur grandeur exceptionnelle. J'ai expressément examiné, quant à ce dernier point, un assez grand nombre de coupes transversales, et jamais je n'ai trouvé la cavité de segmentation limitée uniquement par le vitellus nutritif. M. Balfour [1]) dit aussi: „il est douteux qu'à

[1]) Balfour, *l. c.* p. 35.

aucune période le plancher de la cavité soit entièrement dépourvu de cellules". Et il ajoute: „le nombre des cellules du plancher de la cavité diffère considérablement dans divers cas, mais ces cas rentrent dans la catégorie des variations individuelles et ne doivent pas être regardés comme indiquant des états différents de développement". Chez les objets les plus favorablement conservés je n'ai jamais vu ces cellules former plus d'une seule assise (voir Pl. V, fig. 3).

Suivant M. Schultze, les éléments décrits par lui sous le nom de „cellules blastodermiques secondaires" pénétreraient dans la cavité de segmentation et se présenteraient alors comme des „cellules complètement développées, toutes de même forme et de même grandeur". Par cette uniformité elles se distingueraient immédiatement des cellules de segmentation de la cavité blastodermique, lesquelles n'acquièrent qu'après des divisions répétées l'aspect des cellules blastodermiques secondaires; par suite, la part que celles-ci prennent à la composition des tissus embryonnaires se laisserait déterminer dans les premiers stades du développement. Les cellules blastodermiques secondaires remplissent alors — toujours suivant M. Schultze — les interstices des cellules de segmentation restées dans la cavité de segmentation, et elles refoulent ces cellules vers le feuillet blastodermique supérieur.

Bien qu'il déclare ne pas pouvoir contredire formellement ces assertions, M. Balfour les regarde pourtant comme très improbables. Je suis tout à fait de son avis, et même je dois contester positivement que des éléments étrangers, issus du vitellus nutritif, pénètrent dans le germe. A la vérité, sur des coupes transversales minces, on trouve sous la cavité de segmentation les mêmes noyaux libres qui se voient partout sous l'archiblaste, dans le parablaste; mais ces noyaux libres se distinguent si nettement des noyaux des cellules de segmentation, qu'une confusion n'est guère possible. Tandis que les cellules de segmentation avaient en moyenne un diamètre de 0,040—0,045 mm., leur noyau, ordinairement arrondi, mesurait 0,0085—0,0090 mm. Les noyaux libres, au contraire, étaient généralement de forme

PROGRAMME

DE LA

Société Hollandaise des Sciences, à Harlem.

ANNÉE 1881.

La Société hollandaise des sciences a tenu, le 21 mai 1881, sa 129ième assemblée générale.

Le Président, Jhr. G. F. VAN TETS, ouvre la séance par un discours dans lequel il paie un tribut de regrets à la mémoire des directeurs A. H. VAN WICKEVOORT CROMMELIN et J. J. TEDING VAN BERKHOUT et des membres nationaux J. P. DELPRAT et J. BOSQUET, enlevés à la Société depuis sa dernière réunion. Il annonce ensuite l'accession, comme Directeur de la Société, de M. J. WÜSTE, de Velsen. Enfin il fait part d'une résolution de MM. les Directeurs, par laquelle un subside de 1000 florins est mis à la disposition de M. C. H. D. BUYS BALLOT, directeur en chef de l'Institut météorologique d'Utrecht, pour contribuer aux frais de l'expédition polaire internationale qu'on projette d'entreprendre en 1882—1883.

La publication des *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles* a été continuée régulièrement: les nos 3, 4 et 5

du tome XV et 1 et 2 du tome XVI ont vu le jour dans le courant de l'année 1880—1881.

Deux Mémoires ont été adressés à la Société sur des sujets mis au concours en 1879:

1°. Un Mémoire en allemand, avec la devise: *Das Bessere ist des Guten Feind*", en réponse à la question I:

„La comète d'Olbers, dont une seule apparition a été observée, en 1815, doit, d'après les calculs de Bessel (*Abhandlungen der Math. Classe der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften, aus den Jahren* 1812—1813, Berlin, 1816), traverser de nouveau son périhélie au commencement de l'année 1887.

Dans ces calculs, il n'a pas été fait usage de toutes les observations auxquelles la comète a donné lieu, et depuis qu'ils ont été exécutés on a appris à connaître avec plus d'exactitude les masses des planètes perturbatrices, ainsi que les positions de beaucoup des étoiles qui ont servi de termes de comparaison.

La Société demande un nouveau calcul de l'orbite de cette comète, fondé sur toutes les observations qui ont été accomplies lors de la première apparition, et tenant compte des déterminations les plus exactes tant des masses planétaires que des positions des étoiles de comparaison. (Voir: *Nature*, 23 janvier et 20 février 1879)".

La Commission chargée de l'examen de ce travail ayant émis, à l'unanimité des voix, un avis favorable, la Société décerne à l'auteur:

M. **F. K. GINZEL**,

astronome à Vienne, la *médaille d'or* et la prime de *cent cinquante florins.*

2°. Un Mémoire en français, avec la devise: *the Theory of the Zodiacallight was greatly in error* etc., en réponse à la question II:

„Les observations faites sur la lumière zodiacale par M. Jones (*Observations of the Zodiacallight from April* 2, 1853 *to April* 22, 1855 *made chiefly on board the U. S. steamfregate Mississipi*, *by Rev.* G. Jones, A. M. Washington 1856) ont conduit M. Serpieri (*Memorie degli Spettroscopisti Italiani*, *Appendice al* Vol. V) à penser que cette lumière, contrairement à l'opinion généralement admise, était un phénomène ayant sa source dans l'atmosphère terrestre.

On demande une appréciation critique de la théorie de M. Serpieri, combinée avec un nouvel examen de la nature de la lumière zodiacale, spécialement en ce qui concerne la question de savoir si l'origine en doit être cherchée dans l'atmosphère ou en dehors de l'atmosphère. Cet examen devra s'appuyer non seulement sur les observations de M. Jones et d'autres, mais aussi sur des observations propres à l'auteur".

Tout en rendant justice à la partie critique de ce travail, la Société, considérant qu'il ajoute peu de chose à notre connaissance de la nature de la lumière zodiacale, ne croit pas pouvoir le couronner. L'assemblée décide de ne pas remettre la question au concours.

Après avoir adopté les sujets de prix formulés ci-après, la Société nomme membres nationaux:

MM. Th. H. Behrens, professeur à l'Ecole polytechnique de Delft,
Th. H. Mac Gillavry, professeur à l'université de Leyde,
H. de Vries, professeur à l'université d'Amsterdam.

QUESTIONS PROPOSÉES COMME SUJETS DE PRIX:

Jusqu'au 1er janvier 1882.

I. Déterminer exactement, en unités de Weber, la résistance d'une colonne de mercure de un mètre de longueur et de un millimètre carré de section, à 0°. Toutes les mesures relatives

à cette détermination devront être communiquées d'une manière aussi complète que possible.

II. Nos connaissances au sujet de la relation qui existe entre l'intensité de la lumière émise sous forme de rayons et l'angle d'émission n'ont pas fait, en ce qui concerne les surfaces réfléchissant la lumière par diffusion, de progrès marqué depuis Bouguer, tandis que, pour les surfaces émettant une lumière propre, ces connaissances reposent presque entièrement sur des recherches relatives à la chaleur rayonnante.

La Société demande donc de nouvelles séries d'observations sur l'intensité de la lumière émise dans différentes directions par ces deux sortes de surfaces, ainsi que l'établissement de la loi suivant laquelle cette intensité dépend de l'angle d'émission et de la nature de la surface lumineuse.

III. Faire l'étude anatomique du système vasculaire sanguin des Edriophthalmes (Crustacés).

IV. Soumettre à une appréciation critique les différentes observations qui ont été faites sur le changement de réfrangibilité que la lumière éprouverait en conséquence d'un mouvement de la source lumineuse ou du milieu réfringent, et exposer les résultats qui peuvent être déduits de ces observations.

V. Décrire la végétation d'Atjeh (Sumatra), et éclairer cette description de données concernant le sol et le climat.

VI. Décrire la végétation de l'île de Timor, l'éclairer de données sur le sol et le climat, et la comparer avec les flores polynésienne et australienne.

VII. Comparer entre elles, en tenant compte de la constitution du sol, la flore du littoral des provinces occidentales de la Néerlande et celle de la côte opposée de l'Angleterre, spécialement celle des comtés de Norfolk, Suffolk, Essex, Kent et Sussex.

Jusqu'au 1er janvier 1883.

I. On demande des mesures exactes concernant l'influence de la lumière sur le pouvoir conducteur électrique du sélénium, ainsi que des recherches pouvant faire connaître si d'autres propriétés électriques sont également modifiées par la lumière et si d'autres matières éprouvent une influence analogue.

II. Donner un résumé critique des connaissances acquises sur les relations chimiques des principaux éléments de la bile, tant entre eux qu'avec d'autres corps connus, et, autant que possible, éclairer ces relations par des expériences nouvelles.

III. Donner un résumé critique des connaissances acquises sur les relations chimiques des terpènes, tant entre eux qu'avec d'autres corps mieux connus, et, autant que possible, éclairer ces relations par des expériences nouvelles.

IV. Etudier l'influence de la structure et de l'élasticité sur le ton composé (le timbre) des corps sonores.

V. Soumettre à un examen approfondi la théorie du milieu électrique proposée par Clerk Maxwell, en la considérant aussi dans ses rapports avec la théorie électro-magnétique de la lumière.

VI. On demande des expériences comparatives sur la décomposition des matières organiques dans le sol dénudé et dans le sol couvert de végétation.

VII. On demande de nouvelles recherches sur l'origine du mésoderme chez les animaux vertébrés.

VIII. On demande des recherches exactes sur le développement de une ou plusieurs espèces d'Annélides.

IX. On demande des recherches sur le développement de une ou plusieurs espèces d'Echinodermes, depuis le stade larvaire jusqu'à l'état parfait.

La Société recommande aux concurrents d'abréger autant que possible leurs mémoires, en omettant tout ce qui n'a pas un rapport direct avec la question proposée. Elle désire que la clarté soit unie à la concision, et que les propositions bien établies soient nettement distinguées de celles qui reposent sur des fondements moins solides.

Elle rappelle, en outre, qu'aucun mémoire écrit de la main de l'auteur ne sera admis au concours, et que même, une médaille eût-elle été adjugée, la remise n'en pourrait avoir lieu, si la main de l'auteur venait à être reconnue, entre-temps, dans le travail couronné.

Les plis cachetés des mémoires non couronnés seront détruits sans avoir été ouverts, à moins que le travail présenté ne soit qu'une copie d'ouvrages imprimés, auquel cas le nom de l'auteur sera divulgué.

Tout membre de la Société a le droit de prendre part au concours, à condition que son mémoire, ainsi que le pli, soient marqués de la lettre L.

Le prix offert pour une réponse satisfaisante à chacune des questions proposées, consiste, au choix de l'auteur, en une *médaille d'or* frappée au coin ordinaire de la Société et portant le nom de l'auteur et le millésime, ou en une somme de *cent-cinquante florins*; une prime supplémentaire de *cent-cinquante florins* pourra être accordée si le mémoire en est jugé digne.

Le concurrent qui remportera le prix ne pourra faire imprimer le mémoire couronné, soit séparément, soit dans quelque autre ouvrage, sans en avoir obtenu l'autorisation expresse de la Société.

Les mémoires, écrits lisiblement, en *hollandais*, *français*, *latin*, *anglais*, *italien* ou *allemand* (mais non en caractères allemands), doivent être accompagnés d'un pli cacheté renfermant le nom de l'auteur, et envoyés franco au Secrétaire de la Société, le professeur E. H. von Baumhauer, à Harlem.

---

ovale et avaient un diamètre longitudinal de 0,020—0,024 mm., sur un diamètre transversal de 0,012—0,016 mm.

L'ectoderme est formé de cellules distinctement cylindriques, qui dans la partie embryonnaire du germe sont plus hautes qu'ailleurs et plus grêles au bord. Suivant M. Balfour, „cette couche n'a jamais plus d'une cellule d'épaisseur", assertion entièrement d'accord avec mes propres observations et aussi avec les communications de M. His. Les cellules de l'ectoderme, de même que les cellules non différenciées du blastoderme, sont remplies, comme on sait, de globules vitellins nombreux, mais très petits.

Bientôt arrive l'un des moments les plus importants du développement, celui où se forme le premier rudiment de l'embryon. Outre les communications de M. Balfour sur ce sujet, nous possédons, en second lieu, celles de M. His. On peut dire que les unes sont diamétralement opposées aux autres.

M. His cherche à établir que chez les poissons cartilagineux, de même qu'il l'indique pour les poissons osseux, „le corps se forme par la soudure axiale de deux moitiés naissant dans le bourrelet marginal". Il m'a été impossible, comme je l'exposerai dans une communication ultérieure, de reconnaître que les choses se passent ainsi chez les poissons osseux, et je ne puis l'admettre non plus pour les poissons cartilagineux. Le résultat de mes recherches est, en effet, entièrement conforme à celui de M. Balfour.

Le futur embryon se manifeste, suivant M. His [1]), sur des disques embryonnaires ayant atteint un diamètre d'environ 2 mm. (*Pristiurus* et *Scyllium*), „par un léger soulèvement et une inflexion de la partie postérieure du bord". Chez les disques embryonnaires de 3 mm., „la partie postérieure épaissie du bourrelet marginal forme une anse, qui s'avance vers le centre du disque en même temps qu'elle s'élève au-dessus de son niveau, et qui circonscrit une fossette". Cette fossette est le commencement du sillon primitif. Lorsque le disque atteint une largeur de 4 mm., le sillon primitif est devenu bien distinct. L'embryon

---

[1]) His, *loc. cit.*

montre alors de chaque côté trois plis longitudinaux; le pli intérieur limite „la partie centrale et par suite la plaque médullaire"; le second („pli embryonnaire latéral") borne „la partie pariétale"; le troisième („pli extérieur") se trouve en dehors de l'embryon proprement dit et est analogue, suivant M. His, au système de plis d'où provient l'amnios chez les amniotes. A l'extrémité postérieure, l'embryon se fend en deux prolongements, les *Randbeugen* de His. L'embryon se forme maintenant, toujours d'après M. His, „aux dépens des matériaux contenus, de chaque côté, dans la moitié postérieure du bourrelet marginal. L'agrégation des matériaux et leur soudure médiane procèdent d'avant en arrière, de sorte que la partie postérieure du bourrelet marginal constitue d'abord la tête, puis successivement le tronc et la queue de l'embryon."

M. Balfour comprend d'une tout autre manière la formation de l'embryon chez les poissons cartilagineux. Selon lui, la partie renflée ou embryonnaire du germe (*embryonic swelling*: Balfour) devient de plus en plus distincte et fait saillie, sous forme de rebord (*embryonic rim*: Balfour), au-dessus de la surface du vitellus. C'est dans l'axe du germe (ou de l'embryon) que ce rebord s'élève le plus haut. Les cellules de l'ectoderme sont ici disposées en une ligne arquée et se relient immédiatement aux cellules non encore différenciées du blastoderme; simultanément, quelques-unes de ces cellules prennent ici une forme cylindrique et forment ainsi le premier rudiment de l'entoderme (*hypoblast*: Balfour). Au rebord embryonnaire, l'ectoderme et l'entoderme se rattachent l'un à l'autre sans discontinuité. Le rebord s'élargit rapidement, en s'étendant de plus en plus vers le centre, par la transformation (*conversion*: Balfour) de cellules non encore différenciées du germe (*lower layer cells*: Balfour). Dès que le rebord embryonnaire a atteint des dimensions déterminées, la situation de l'embryon se dessine par l'apparition d'un sillon (*medullary groove*: Balfour) dans la partie la plus proéminente. Entre le rebord embryonnaire et le vitellus il y a une cavité, la cavité intestinale primitive. Le toit de cette cavité est formé

par l'entoderme, le plancher par le vitellus. Quant à l'origine du mésoderme, M. Balfour dit: „vers le temps de la formation du sillon médullaire, le mésoblaste se constitue distinctement. Il apparaît sous la forme de deux plaques indépendantes, une de chaque côté du sillon médullaire, et est entièrement dérivé de cellules blastodermiques non encore différenciées (*lower layer cells*)".

Pour faire mieux comprendre les résultats auxquels il est arrivé, M. Balfour a donné les figures d'un grand nombre de coupes transversales et longitudinales. Je dois souscrire entièrement à ces résultats. Les préparations que j'ai obtenues, de coupes menées soit longitudinalement, soit transversalement, sont en si parfait accord avec celles de M. Balfour, qu'il m'a semblé absolument superflu de les figurer à nouveau. Je n'ai fait d'exception (voir Pl. V, fig. 4) que pour une coupe longitudinale menée par l'axe d'un embryon parvenu au stade B de Balfour. Si la formation de l'embryon avait lieu comme le dit M. His, jamais on ne pourrait obtenir de pareilles images.

Dans ce stade, la cavité de segmentation est presque entièrement disparue Suivant M. Balfour [1]), son plancher cellulaire est dû en partie à l'accroissement du dehors en dedans de la périphérie du blastoderme, et en partie à la formation de nouvelles cellules aux dépens du vitellus. Lorsque commence la différenciation de l'hypoblaste et du mésoblaste, la cavité de segmentation diminue et finalement s'évanouit". Que, lors de la constitution du plancher de la cavité de segmentation, de nouvelles cellules se formeraient aux dépens du vitellus, c'est ce qui me paraît peu probable. A mon avis, ces cellules proviennent uniquement de la division répétée de cellules déjà existantes, et je suis d'autant plus fondé à admettre cette origine, que jamais, comme il a été dit ci-dessus, je n'ai vu le vitellus nutritif former à lui seul la base de la cavité de segmentation.

Une des découvertes les plus importantes de M. Balfour a été,

---

[1]) Balfour, *l. c.*, p. 45.

sans contredit, la constatation du fait que la corde dorsale, chez les poissons cartilagineux, naît de l'entoderme. Tous ceux qui voudront étudier le développement de ces poissons pourront, sans beaucoup de peine, vérifier ce fait. En un point seulement, — point secondaire, il est vrai, mais qui ne me semble pourtant pas dépourvu d'intérêt, — je me sépare de M. Balfour. Il dit [1]: „De la série de coupes que j'ai figurées, il résulte clairement que la notocorde commence à se séparer de l'hypoblaste à l'extrémité antérieure, d'où la séparation s'étend graduellement en arrière. L'extrémité postérieure de la notocorde reste encore longtemps attachée à l'hypoblaste, et ne devient entièrement libre que vers la fin de la période dont il est question dans ce chapitre (stades B à G de Balfour)."

Des séries de coupes transversales m'ont fait voir tout le contraire, à savoir, que la corde ne commence pas à se former à la partie *antérieure* de l'embryon, mais à sa partie *postérieure*. Les fig. 5, 6, 7 (Pl. V) représentent trois coupes transversales faisant partie d'une série pratiquée sur un embryon de *Scyllium canicula*, dans un stade compris entre les stades C et D de Balfour. Dans la première de ces coupes (fig. 5), la plus rapprochée de l'extrémité antérieure, on ne découvre encore aucun indice de corde. L'ectoderme et l'entoderme s'appliquent directement l'un contre l'autre; l'intestin, comme on peut le voir, s'est déjà complètement fermé. La fig. 6 est une coupe prise plus en arrière. La corde est ici justement en train de se séparer de l'entoderme. La fig. 7, enfin, est prise encore un peu plus en arrière (entre le premier et le second tiers de l'embryon, en partant de l'extrémité antérieure). Elle montre clairement la corde déjà entièrement séparée de l'entoderme, tandis que l'intestin est encore largement ouvert.

Les fig. 8—12 (Pl. VI) sont quatre coupes transversales d'un embryon de *Pristiurus melanoticus*, correspondant à peu près au stade E de Balfour (peut-être un peu plus jeune). La pre-

[1]) Balfour, *l. c.*, p. 93.

mière coupe (fig. 8), prise le plus en avant, montre dans l'entoderme un commencement de tendance à la séparation de la corde. Dans la coupe immédiatement suivante (fig. 9), le phénomène est déjà mieux accusé. Non seulement l'intestin est ici déjà entièrement fermé, mais l'embryon est aussi déjà tout à fait libre. La fig. 10 représente une coupe prise encore plus en arrière; en ce point, la corde est entièrement détachée de l'entoderme, et il en est de même dans toutes les coupes suivantes. Le dédoublement du mésoderme en deux feuillets, le *somatic layer* et le *splanchnic layer* de Balfour, se voit admirablement, et dans les parties latérales (*lateral plates*: Balfour) les deux plaques ne sont épaisses que d'une seule couche de cellules.

La fig. 11, enfin, est une coupe pratiquée tout à fait à l'extrémité postérieure de l'embryon. L'intestin, on le conçoit, est encore complètement ouvert dans cette partie. La corde, qui se distingue très nettement, n'a pas ici (sur sa coupe transversale) une forme arrondie ou ovale, mais une forme plus ou moins cordée, et sa partie inférieure, amincie en pointe, est encore un peu unie à l'entoderme, ou plutôt engagée, comme un coin, entre les cellules de l'entoderme. Cette particularité, qui persiste jusque dans le stade où l'extrémité postérieure de l'embryon devient libre à son tour, mérite de nous arrêter un instant. Dans la fig. 13, je l'ai représentée pour un embryon un peu plus âgé, et à un grossissement un peu plus fort; la corde, comme je l'ai dit, pénètre encore, sous forme de coin, entre les cellules de l'entoderme. Dans une autre coupe du même embryon (fig. 14), prise un peu plus en arrière, cette partie engagée entre les cellules de l'ectoderme s'est distinctement détachée du reste de la corde dorsale. J'ai observé ce dernier phénomène aussi bien chez les embryons de *Pristiurus* que chez ceux de *Scyllium*.

Quant à la signification de cette partie détachée, et à sa destinée ultérieure, elles me sont inconnues. Il ne faut pas la confondre, en tout cas, avec le corps particulier que M. Balfour décrit comme „situé sous la notocorde et dérivé de l'hypo-

blaste", et auquel il donne le nom de *subnotochordal rod*[1]). Celui-ci n'apparaît qu'à un stade beaucoup plus avancé, et se forme réellement, comme l'indique M. Balfour, aux dépens de l'entoderme. M. His [2]) dit: „Plus tard la corde se sépare aussi de l'entoderme; toutefois la liaison reste encore longtemps maintenue par une courte plaque médiane". M. His compare cette plaque médiane au *subnotochordal rod* de Balfour, mais il me semble que cette assimilation n'est nullement fondée, la seconde de ces parties ne se formant que beaucoup plus tard. Quant à savoir si la première est identique avec la portion de la corde que j'ai vue, ainsi qu'il a été dit plus haut, se détacher du reste, c'est une question que la description sommaire de M. His ne me permet pas de trancher.

Comme on vient de le voir, M. His aussi fait dériver la corde de l'entoderme. M. Schultze, au contraire, prétend que „la corde naît de la fusion de la couche blastodermique supérieure avec l'inférieure, cette dernière introduisant alors, dans la section qui correspond au rudiment de la corde, des éléments du feuillet embryonnaire moyen". Il n'est pas nécessaire de nous arrêter à cette opinion, qui évidemment repose sur des observations inexactes.

La partie tout à fait postérieure de la corde est un peu élargie et se termine en deux petits appendices latéraux (fig. 12. Ce détail n'est pas indiqué par M. Balfour, mais bien par M. His) [3]), comme il résulte des passages suivants: „Au milieu du sillon primitif se voit la corde dorsale, qui, elle aussi s'élargit à son extrémité postérieure"; et plus loin: „à l'extrémité postérieure existe encore la dilatation béante de la fosse, au fond de laquelle on voit la corde bifurquée".

Tandis que M. Balfour, ainsi que nous l'avons déjà exposé, regarde l'accroissement de l'embryon des poissons cartilagineux comme se faisant par intussusception, M. His rejette entière-

[1]) Balfour, *l. c.*, p. 227.
[2]) His, *l. c.*, p. 120.
[3]) His, *l. c.*, p. 113.

ment cette manière de voir et laisse l'embryon se former par apposition, „aux dépens des matériaux contenus, de chaque côté, dans la moitié postérieure du bourrelet marginal. L'agrégation des matériaux et leur soudure médiane procèdent d'avant en arrière, de sorte que la partie postérieure du bourrelet marginal constitue d'abord la tête, puis successivement le tronc et la queue de l'embryon" [1]).

Si l'embryon se développait de la manière indiquée par M. His, il serait complètement inexplicable que la corde dorsale commence à se séparer à l'extrémité postérieure de l'embryon, et puisse même y être déjà entièrement formée, ainsi que je l'ai dit et représenté (fig. 7), dans un stade compris entre les stades C et D de Balfour, tandis que l'embryon, libre seulement dans sa partie la plus antérieure, est dans le reste de son étendue encore intimement uni au vitellus nutritif et prend, avant de devenir entièrement libre, un accroissement longitudinal assez notable. Un second fait, qui plaide contre la théorie d'apposition de M. His, c'est que la distance du pédicule vitellin à l'extrémité antérieure de l'embryon augmente aussi durant les stades compris entre D et G de Balfour; cela ne se comprendrait en aucune façon s'il était vrai, comme le pense M. His, que: „le bourrelet marginal du disque germinatif est employé tout entier à la formation de l'embryon, et le progrès de celle-ci est tellement lié à l'enveloppement du vitellus par le germe, que l'agrégation des matériaux de l'embryon est terminée en même temps que cet enveloppement". S'il en était ainsi, la distance du pédicule vitellin au bord antérieur de l'embryon ne pourrait jamais s'accroître, ni la corde dorsale être déjà entièrement séparée à l'extrémité postérieure de l'embryon alors qu'aucun vestige n'en est encore visible à l'extrémité antérieure. Les résultats auxquels je suis arrivé sont donc, à mon avis, tout en faveur de l'opinion de M. Balfour sur la formation de l'embryon chez les poissons cartilagineux.

---

[1]) His, *l. c.*, p. 115.

Ainsi que nous l'avons vu, la cavité intestinale apparaît originairement comme un petit espace vide entre l'embryon et le vitellus nutritif; en avant elle se termine en cul-de-sac, en arrière elle présente au contraire une ouverture en forme de fente, qui correspond, comme l'a déjà fait remarquer M. Balfour, à l'ouverture anale de Rusconi. C'est à l'extrémité céphalique que commence l'occlusion de la cavité intestinale, occlusion à laquelle contribuent, suivant M. Balfour, deux processus différents: „L'un de ceux-ci", dit il, „est une induplication de l'embryon, partant du blastoderme. L'autre est un simple développement de cellules, indépendant de toute inflexion. Au premier de ces processus sont dues la profondeur et l'étroitesse de la cavité alimentaire; le second a pour résultat la formation de la paroi ventrale de cette cavité. La combinaison des deux processus produit la section triangulaire spéciale qui caractérise dans ce stade l'extrémité antérieure fermée de la cavité alimentaire. Sous le rapport de l'intérêt, la nature de la susdite inflexion le cède beaucoup à la formation de la paroi ventrale du canal alimentaire. Celle-ci résulte du développement de cellules aux deux côtés de la ligne médiane. Les cellules en question ne dérivent toutefois pas de cellules préexistantes de l'hypoblaste, mais naissent spontanément autour de noyaux du vitellus. Elles se forment dans le vitellus, par simple agrégation de protoplasme autour de noyaux préexistants".

En ce qui concerne ce dernier point, je ne suis pas d'accord avec M. Balfour. L'occlusion de la cavité intestinale au côté ventral résulte, il est vrai, de ce que, à partir de la base des parois latérales de l'intestin, les cellules se multiplient vers la ligne médiane, où elles se rejoignent; mais cet accroissement dépend uniquement de la prolifération des cellules entodermiques déjà existantes, et les noyaux libres du vitellus nutritif n'y prennent aucune part. Entre les noyaux des cellules entodermiques et les noyaux libres du vitellus nutitrif la différence est si grande, surtout quant aux dimensions respectives, qu'il n'est pas difficile de les distinguer les uns des autres. A la vérité, là où les parois

de l'intestin tendent l'une vers l'autre, on rencontre un assez grand nombre de ces noyaux libres; mais je les regarde comme n'ayant d'autre rôle que de fournir des matériaux nutritifs aux cellules entodermiques, qui précisément ont ici besoin d'une abondante nourriture, pour pouvoir, par leur prolification énergique, croître les unes vers les autres et finalement occlure la cavité. Un nombre encore plus considérable de ces noyaux libres se trouve dans cette partie du vitellus où se formera bientôt le pédicule vitellin.

M. Balfour nous a aussi déjà appris que le canal médullaire ne s'étend pas jusqu'à l'extrémité antérieure de l'embryon, mais qu'il se développe en une plaque ronde et plate, — *cephalic plate* de Balfour, — qui constitue le premier rudiment du cerveau. Voici ce qu'il dit de cette plaque [1]: „Sa grandeur et sa forme lui donnent une apparence particulière, mais son trait le plus remarquable est l'incurvation ventrale de ses bords. Au lieu de se recourber l'un vers l'autre du côté dorsal, comme on aurait pu s'y attendre, ces bords s'infléchissent brusquement dans la direction ventrale. Ce trait est visible dès le présent stade, mais il s'accuse mieux dans les suivants et atteint son maximum dans l'état F, où l'on pourrait presque supposer que les bords de la plaque céphalique vont croître vers le bas et se rejoindre sur le côté ventral de l'embryon. Lorsque le sillon médullaire tend à se fermer, les bords de la plaque céphalique perdent leur incurvation ventrale et reprennent la courbure normale, vers le haut; la plaque élargie ne sert plus alors qu'à enclore une portion élargie, céphalique, du canal médullaire''.

Ces remarquables modifications dans la situation de la plaque cérébrale, moi aussi je les ai observées, telles que M. Balfour les a décrites, tant sur les embryons de *Pristiurus* et de *Scyllium* que sur ceux de *Mustela*. Dans la fig. 16 j'ai représenté une coupe transversale, où les bords latéraux de la plaque cérébrale ont perdu leur incurvation ventrale si caractéristique, se sont

[1]) Balfour, *l. c.*, p. 83.

redressés vers le côté dorsal et s'apprêtent à se souder l'un à l'autre, pour former ainsi le rudiment du cerveau.

En terminant, je ferai remarquer que la formation d'arrière en avant de la corde dorsale, chez les poissons cartilagineux, me paraît offrir de l'intérêt surtout au point de vue phylogénétique. Sans entrer dans aucun développement, je rappellerai le fait généralement connu que l'ouverture anale de Rusconi (ouverture d'invagination, *Urmund*) marque primitivement l'extrémité antérieure de l'animal; or, c'est en accord avec ce fait, que nous voyons encore, chez les poissons cartilagineux, la corde se constituer d'abord à cette extrémité antérieure originelle, et procéder ainsi, dans son développement, d'arrière en avant.

EXPLICATIONS DES FIGURES.

(Pl. V).

Fig. 1. Coupe d'un blastoderme de *Pristiurus melanoticus*, dans le stade où apparaissent les premiers linéaments de l'embryon $\frac{470}{1}$.

d. membrane vitelline.
ekt. ectoderme.

Fig. 2. Coupe transversale du germe de *Torpedo marmorata*, dans un état de développement très peu avancé. $\frac{60}{1}$.

Fig. 3. Coupe transversale du germe de *Pristiurus melanoticus*, dans un état beaucoup plus avancé. $\frac{60}{1}$.

a. cavité de segmentation.
ekt. ectoderme.

Fig. 4. Coupe longitudinale passant à peu près par l'axe d'un embryon de *Pristiurus melanoticus*, dans le stade *B* de Balfour. $\frac{80}{1}$.

ekt. ectoderme.
mes. mésoderme.

d'. vitellus.
d. cavité intestinale.
e. cellules blastodermiques non encore différenciées.

Fig. 5, 6 et 7. Trois coupes transversales d'une série prise sur un embryon de *Scyllium canicula*, dans un stade intermédiaire à *C* et *D* de Balfour. $\frac{100}{1}$.

ekt. ectoderme.
ent. entoderme.
mes. mésoderme.
ch. corde dorsale.
d. cavité intestinale.
d'. vitellus.

La fig. 5 est prise en avant, fig. 6 un peu plus en arrière, fig. 7 encore plus en arrière.

Fig. 8—11. Quatre coupes transversales d'une série prise sur un embryon de *Pristiurus melanoticus*, dans un stade correspondant à peu près au stade *E* de Balfour.

ekt., *ent.*, *mes.*. *ch.*, comme dans les Fig. 5—7.

Fig. 8, prise en avant, $\frac{280}{1}$; fig. 9, un peu plus en arrière, $\frac{280}{1}$; fig. 10, encore un peu plus en arrière, $\frac{280}{1}$; fig. 11, tout à fait à l'extrémité postérieure, $\frac{100}{1}$.

Fig. 12. Partie postérieure de la notocorde se terminant en deux petits appendices latéraux (voir p. 110).

Fig. 13 et 14. Deux coupes transversales prises tout à fait à l'extrémité postérieure d'un embryon de *Pristiurus melanoticus*, dans un stade un peu plus avancé que le précédent. $\frac{160}{1}$.

ekt. ectoderme.
ent. entoderme.
mes. mésoderme.
ch. corde dorsale.
ch'. portion scissiparisée de la corde.

Fig. 15. Coupe transversale de la partie antérieure d'un embryon de *Pristiurus melanoticus*, dans un stade encore plus avancé que le précédent. $\frac{160}{1}$.

ekt., *ent.*, *mes.*, *ch.*, comme dans les fig. 14 et 15.

SUR UN
THÉORÈME D'ABEL
ET SUR LES
FORMULES GONIOMÉTRIQUES QUI S'EN DÉDUISENT,

PAR

G. F. W. BAEHR.

Si l'on pose

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta x} = F(x),$$

où

$$\Delta x = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)},$$

on aura d'après un théorème d'Abel (*Oeuvres complètes*, tome I, p. 355)

$$F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_\mu) = C, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, dont les carrés $x_1^2, x_2^2 \ldots x_\mu^2$ satisfont à l'équation entière paire, de degré 2μ,

$$f(x)^2 - \varphi(x)^2 (\Delta x)^2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

où les polynômes entiers $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont quelconques, mais l'un des deux pair l'autre impair, et leurs coefficients supposés

variables; C étant une constante, qui ne dépend pas des valeurs arbitraires attribuées à ces coefficients.

Si, en prenant tous ces coefficients égaux à zéro, l'équation (2) prend la forme

$$x^{2\mu} = 0,$$

c'est-à-dire, que toutes ses racines soient nulles, chacun des termes du premier membre de (1) devient zéro, et par suite la constante C sera alors nulle.

Abel a fait voir que l'on peut choisir les polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ et déterminer leurs coefficients tellement, que $\mu - 1$ quantités arbitraires $x_1, x_2 \ldots x_{\mu-1}$ soient racines de l'équation (2), laquelle donnera alors la racine x_μ en fonction algébrique de ces quantités arbitraires.

D'après la notation de Jacobi, posant $F(x) = u$, on a $x = \sin am\, u$; la formule (1) devient

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{\mu-1} + u_\mu = 0,$$

et l'équation (2) donnera donc $\sin am\, u_\mu$, ou $\pm \sin am\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_{\mu-1})$, en fonction algébrique de $\sin am\, u_1$, $\sin am\, u_2 \ldots$ etc.

Si le nombre μ est pair, ou $\mu = 2n$, il faudra poser

$$f(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_{n-1} x^{2n-2} + x^{2n},$$

$$\varphi(x) = x(b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \ldots + b_{n-2} x^{2n-4}),$$

qui contiennent $2n - 1$ coefficients indéterminés, tandis que les quantités arbitraires $x_1, x_2 \ldots x_{2n-1}$ devront satisfaire à

$$a_0 + a_1 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{2n-2} + x^{2n} + (b_0 x + b_1 x^3 + \ldots + b_{n-2} x^{2n-3}) \Delta x = 0,$$

un des deux facteurs dans lesquels on peut décomposer l'équation (2).

On aura donc, entre les inconnues $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, b_0, b_1 \ldots b_{n-2}$ les $2n - 1$ équations linéaires, que nous pouvons indiquer par

$$a_0+a_1x^2\ldots+a_{n-1}x^{2n-2}+b_0x\Delta x+b_1x^3\Delta x\ldots+b_{n-2}x^{2n-3}\Delta x=-x^{2n}\left|\begin{matrix}x_1\\ \vdots\\ x_{2n-1}\end{matrix}\right.,$$

le signe à la droite du second membre indiquant que l'on considère le groupe de $2n-1$ équations obtenues en donnant à x successivement les indices $1, 2, \ldots, 2n-1$.

Il suffira d'en résoudre a_0, parce que l'équation (2) ordonnée a pour dernier terme a_0^2, et donne ainsi pour le produit des racines

$$x_0^2 . x_1^2 \ldots x_{2n-1}^2 x_{2n}^2 = a_0^2,$$

d'où

$$x_{2n}=\pm\frac{a_0}{x_0 . x_1 \ldots x_{2n-1}}.$$

Employant pour les déterminants une notation analogue à celle par laquelle on a représenté le groupe des $2n-1$ équations, on tire de celles-ci

$$a_0=\frac{-\left|x^{2n} . x^2 . x^4 \ldots x^{2n-2} . x\Delta x . x^3\Delta x \ldots x^{2n-3}\Delta x\right|\begin{matrix}x_1\\ \vdots\\ x_{2n-1}\end{matrix}}{\left|1 \;. x^2 . x^4 \ldots x^{2n-2} . x\Delta x . x^3\Delta x \ldots x^{2n-3}\Delta x\right|\begin{matrix}x_1\\ \vdots\\ x_{2n-1}\end{matrix}},$$

donc, divisant les lignes successives du déterminant au numérateur par $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$, on obtient

$$x^{2n}=\pm\frac{\left|x^{2n-1} . x . x^3 \ldots x^{2n-3} . \Delta x . x^2\Delta x \ldots x^{2n-4}\Delta x\right|\begin{matrix}x_1\\ \vdots\\ x^{2n-1}\end{matrix}}{\left|1 \;. x^2 . x^4 \ldots x^{2n-2} . x\Delta x . x^3\Delta x \ldots x^{2n-3}\Delta x\right|\begin{matrix}x_1\\ \vdots\\ x^{2n-1}\end{matrix}};$$

pour déterminer le signe, on fera $n=2$ et $x_3=0$, ce qui donne

$$x_4 = \pm \begin{vmatrix} x_1^3 \,.\, x_1 \,.\, \Delta x_1 \\ x_2^3 \,.\, x_2 \,.\, \Delta x_2 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 \,.\, x_1^2 \,.\, x_1\, \Delta x_1 \\ 1 \,.\, x_2^2 \,.\, x_2\, \Delta x_2 \\ 1 \quad 0 \quad 0 \end{vmatrix},$$

ou en développant,

$$x_4 = \pm (x_1^3\, x_2 - x_2^3\, x_1) : (x_1^2\, x_2\, \Delta x_2 - x_2^2 x_1\, \Delta x_1)$$

et, divisant les deux termes du quotient par $x_1\, x_2$,

$$x_4 = \pm \frac{x_1{}^2 - x_2{}^2}{x_1\, \Delta x_2 - x_2\, \Delta x_1},$$

en sorte que par la formule connue pour *sin am* $(u_1 + u_2)$ on conclut qu'il faut prendre le signe $+$.

Ainsi, transposant la colonne $x_{2n-1}\,|$ entre les colonnes x_{2n-3} et $\Delta x\,|$, c'est-à-dire, la faisant avancer de $n-1$ places vers la droite, l'on aura

$$x_{2n} = (-1)^{n-1} \left| \frac{x.x^3 \ldots x^{2n-3}.x^{2n-1}.\Delta x.x^2 \Delta x \ldots x^{2n-4} \Delta x \,\Big|\, \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x^{2n-1} \end{matrix}}{1.x^2 \ldots x^{2n-4}.x^{2n-2}.x\Delta x.x^3 \Delta x \ldots x^{2n-3} \Delta x \,\Big|\, \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x^{2n-1} \end{matrix}} \right| \ldots (3)$$

Si le nombre μ est impair, ou $\mu = 2n + 1$, il faudra poser

$$f(x) = x\,(a_0 + a_1\, x^2 + a_2\, x^4 + \ldots + a_{n-1}\, x^{2n-2} + x^{2n})$$
$$\varphi(x) = \quad b_0 + b_1\, x^2 + b_2\, x^4 + \ldots + b_{n-1}\, x^{2n-2},$$

et les $2n$ quantités arbitraires $x_1, x_2 \ldots x_{2n}$ devront satisfaire à l'équation

$$a_0 x + a_1 x^3 \ldots + a^{n-1} x^{2n-1} + x^{2n+1} + (b_0 + b_1 x^2 \ldots + b_{n-1} x^{2n-2}) \Delta x = 0,$$

en sorte que l'on aura entre les inconnues $a_0 \ldots a_{n-1}, b_0 \ldots b_{n-1}$ les $2n$ équations

$$a_0 x + a_1 x^3 \ldots + a_{n-1} x^{2n-1} + b_0 \Delta x + b_1 x^2 \Delta x \ldots + b_{n-1} x^{2n-2} \Delta\, x = -x^{2n+1} \,\Big|\, \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x^{2n} \end{matrix}$$

d'où il faudra résoudre b_0, ce qui donne

$$b_0 = \frac{-\left| x \,.\, x^3 \ldots x^{2n-1} \,.\, x^{2n+1} \,.\, x^2 \Delta x \,.\, x^4 \Delta x \ldots x^{2n-2} \Delta x \right|_{x_{2n}}^{x_1}}{\left| x \,.\, x^3 \ldots x^{2n-1} \,.\, \Delta x \quad .\, x^2 \Delta x \,.\, x^4 \Delta x \ldots x^{2n-2} \Delta x \right|_{x_{2n}}^{x_1}},$$

et, parce que l'équation (2) donne pour le produit des racines

$$x_1^2 \,.\, x_2^2 \ldots x_{2n}^2 \; x_{2n+1}^2 = b_0^2,$$

on aura

$$x_{2n+1} = -\frac{\left| 1 \,.\, x^2 \ldots x^{2n-2} \,.\, x^{2n} \,.\, x \Delta x . x^3 \Delta x \ldots x^{2n-3} \Delta x \right|_{x_{2n}}^{x_1}}{\left| x \,.\, x^3 \ldots x^{2n-1} \,.\, \Delta x .\, x^2 \Delta x . x^4 \Delta x \ldots x^{2n-2} \Delta x \right|_{x_{2n}}^{x_1}}, \ldots (4)$$

ayant égard que pour $n = 1$ on aurait

$$x_3 = \pm \begin{vmatrix} 1 \,.\, x_1^2 \\ 1 \,.\, x_2^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 \,.\, \Delta x_1 \\ x_2 \,.\, \Delta x_2 \end{vmatrix}$$

ou

$$x_3 = \pm \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1 \Delta x_2 - x_3 \Delta x_1},$$

où il faut prendre le signe — .

Si l'on fait $x_{2n} = 0$ dans (4), tous les éléments de la $2n^{\text{ième}}$ ligne du déterminant au numérateur sont égaux à zéro, excepté le premier qui reste 1, et ce déterminant se réduit alors à

$$- \left| x^2 \ldots x^{2n-2} \,.\, x^{2n} \,.\, x \Delta x \,.\, x^3 \Delta x \ldots x^{2n-3} \Delta x \right|_{x^{2n-1}}^{x_1};$$

pour le déterminant au dénominateur on peut écrire d'abord

$$(-1)^n \left| \Delta x \,.\, x \,.\, x^3 \ldots x^{2n-1} \,.\, x^2 \,\Delta x \,.\, x^4 \Delta x \ldots x^{2n-2} \Delta x \right| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{matrix}$$

parce qu'on a fait reculer de n places vers la gauche la colonne Δx | ; faisant $x_{2n} = 0$, tous les éléments de la $2n^{ième}$ ligne sont zéro, excepté le premier, qui devient 1; ce déterminant se réduit donc à

$$(-1)^{n+1} \left| x \,.\, x^3 \ldots x^{2n-1} \,.\, x^2 \,\Delta x \,.\, x^4 \,\Delta x \ldots x^{2n-2} \Delta x \right| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x^{2n-1} \end{matrix} \; ;$$

chacun des déterminants réduits est divisible par le produit $x_1 \,.\, x_2 \ldots x_{2n-1}$, et remarquant que pour $x_{2n} = 0$ la formule (4) doit donner pour x_{2n+1} la même valeur que la formule (3) donne pour x_{2n}, on voit que les deux formules s'accordent.

Si maintenant, pour passer des fonctions elliptiques aux fonctions goniométriques, on fait $k = 0$, on aura

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta x} = u = arc \sin x,$$

donc

$$x = \sin u, \qquad \Delta x = \cos u,$$

et les formules (3) et (4) donnent, écrivant a au lieu de u,

$\sin(a_1 + a_2 + \ldots + a^{2n-1}) = (-)^{n-1} \times$

$$\frac{\left| \sin a . \sin^3 a \ldots \sin^{2n-1} a . \cos a . \sin^2 a \cos a \ldots \sin^{2n-4} a \cos a \right| \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{matrix}}{\left| 1 . \sin^2 a \ldots \sin^{2n-2} a . \sin a \cos a . \sin^3 a \cos a \ldots \sin^{2n-3} a \cos a \right| \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{matrix}}, \ldots (5)$$

$\sin(a_1 + a_2 + \ldots + a^{2n}) = -$

$$\frac{\left| 1 . \sin^2 a \ldots \sin^{2n-2} a . \sin^{2n} a . \sin a \cos a \ldots \sin^{2n-3} a \cos a \right| \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{matrix}}{\left| \sin a . \sin^3 a \ldots \sin^{2n-1} a . \cos a . \sin^2 a \cos a \ldots \sin^{2n-2} a \cos a \right| \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{matrix}} \ldots (6)$$

Si l'on change a en $\frac{1}{2}\pi - a$, le premier membre de (5) devient

$$\sin\left[\frac{2n-1}{2}\pi - (a_1 + a_2 \ldots + a^{2n-1})\right] = \sin\frac{2n-1}{2}\pi\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n-1})$$
$$= (-1)^{n-1}\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n-1}),$$

et cette formule se change alors en

$$\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n-1}) =$$

$$+\left|\frac{\cos a \,.\, \cos^3 a \ldots \cos^{2n-1} a \,.\, \sin a . \cos^2 a \sin a \ldots \cos^{2n-4} a \sin a}{1 . \cos^2 a \ldots \cos^{2n-2} a \,.\, \cos a \sin a \,.\, \cos^3 \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a}\right| \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a^{2n-1} \\ \hline a_1 \\ \vdots \\ a^{2n-1} \end{matrix};$$

si dans le déterminant au dénominateur on change la colonne $\cos^2 a \mid$ en $1 - \sin^2 a \mid$, ce déterminant devient la différence des deux déterminants

$$| \; 1 \,.\, 1 . \cos^4 a \ldots \cos^{2n-2} a \,.\, \cos a \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a \; |$$

et

$$| \; 1 \,.\, -\sin^2 a \,.\, \cos^4 a \ldots \cos^{2n-2} a \,.\, \cos a \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a \; |,$$

dont le premier, ayant deux colonnes égales, est identiquement nul; donc le dénominateur peut être réduit d'abord au déterminant

$$- \; | \; 1 \,.\, \sin^2 a \,.\, \cos^4 a \ldots \cos^{2n-2} a \,.\, \cos a \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a \; |;$$

ensuite, si dans celui-ci on change la colonne $\cos^4 a \mid$ en $(1 - \sin^2 a)^2 \mid$, ou $1 - 2\sin^2 a + \sin^4 a \mid$, on voit qu'il peut être partagé en trois déterminants, dont les deux premiers sont identiquement zéro, et, en continuant ainsi à introduire le sinus au lieu du cosinus, il sera réduit à

$$\pm | 1 . \sin^2 a . \sin^4 a \ldots \sin^{2n-2} a \,.\, \cos a \sin a . \cos^3 a \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a |;$$

si dans celui-ci on écrit successivement

$$\cos a \sin a \,(1 - \sin^2 a), \; \cos a \sin a \,(1 - \sin^2 a)^2, \; \ldots \text{ etc.}$$

au lieu de

$$\cos^3 a \sin a, \cos^5 a \sin a, \ldots \text{etc.}$$

il sera enfin réduit à

$$\pm \mid 1.\sin^2 a.\sin^4 a \ldots \sin^{2n-2} a.\sin a \cos a.\sin^3 a \cos a \ldots \sin^{2n-3} a \cos a \mid$$

qui est, au signe près, le même que le dénominateur de (5).

Pour déterminer ce signe, comparons deux à deux les colonnes du déterminant primitif; on voit que s'il change de signe en réduisant certaine colonne $\cos^{2p} a \mid$ il en change aussi par la réduction de la colonne $\cos^{2p+1} a \sin a$; le signe définitif sera donc celui qui est introduit par la réduction de la colonne $\cos^{2n-2} a \mid$, avec laquelle ne correspond plus une colonne $\cos^{2n-1} a \sin a$, et comme le dernier terme du développement de $\cos^{2n-2} a = (1 - \sin^2 a)^{n-1}$ est $(-1)^{n-1} \sin^{2n-1} a$, on voit que ce signe sera $(-1)^{n-1}$.

De la même manière le numérateur peut être réduit à

$$\pm \mid \cos a . \cos a \sin^2 a \ldots \cos a \sin^{2n-2} a.\sin a . \sin^3 a \ldots \sin^{2n-3} a \mid;$$

les colonnes, qui pendant la réduction font changer le signe, étant comparées deux à deux, il reste celle désignée par $\cos^{2n-1} a \mid$, ce qui, comme dans le cas précédent, fait voir que le signe définitif sera $(-1)^{n-1}$. Ainsi, on aura d'abord

$$\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n-1}) = \frac{\left| \cos a . \cos a \sin^2 a \ldots \cos a \sin^{2n-2} a.\sin a . \sin^3 a \ldots \sin^{2n-3} a \;\middle|\; \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{matrix} \right.}{\left| 1.\sin^2 a_1 \ldots \sin^{2n-2} a.\sin a \cos a.\sin^3 a \cos a \ldots \sin^{2n-3} a \cos a \;\middle|\; \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a^{2n-1} \end{matrix} \right.};$$

quand au numérateur on échange $(n - 1)$ fois deux colonnes entre elles, savoir les colonnes $\cos a \mid$ et $\sin a \mid$, $\cos a \sin^2 a \mid$ et $\sin^3 a \mid \ldots$, $\cos a \sin^{2n-4} a$ et $\sin^{2n-3} a$, le déterminant devient: $(-1)^{n-1} \times$

$$\sin a.\sin^3 a \ldots \sin^{2n-3} a.\cos a \sin^{2n-2} a.\cos a .\sin^2 a \cos a \ldots \sin^{2n-4} a \cos a|,$$

enfin, si dans celui-ci on porte la colonne $\cos a \sin^{2n-2} a$ | à la dernière place, c'est-à-dire, si l'on fait avancer cette colonne de $n-1$ places vers la droite, il doit être de nouveau multiplié par $(-1)^{n-1}$, et il obtiendra donc le signe $+$, en sorte que l'on aura

$$\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n-1}) = \frac{\left|\sin a \,.\, \sin^3 a \ldots \sin^{2n-3} a . \cos a \,.\, \sin^2 a \cos a \ldots \sin^{2n-2} a \cos a \right|\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1}\end{matrix}}{\left|1 . \sin^2 a \ldots \sin^{2n-4} a . \sin^{2n-2} a . \sin a . \cos a \ldots \sin^{2n-3} a \cos a\right|\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1}\end{matrix}} \quad ..(7)$$

On ne peut de cette manière obtenir $\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n})$, le nombre des éléments étant pair. Si l'on change dans ce cas a en $\frac{1}{2}\pi - a$, le premier membre de (6) devient

$$\begin{aligned} \sin(n\pi - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n})) &= -\cos n\pi \sin(a_1 + a_2 + \ldots + a^{2n}) \\ &= (-1)^{n-1} \sin(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}); \end{aligned}$$

donc, en vertu de la formule (6), on aura aussi

$$\sin(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n}) = (-1)^n \frac{\left|1 . \cos^2 a \ldots \cos^{2n-2} a \,.\, \cos^{2n} a \,.\, \cos a \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a\right|\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n}\end{matrix}}{\left|\cos a . \cos^3 a \ldots \cos^{2n-1} a . \sin a . \cos^2 a \sin a \ldots \cos^{2n-2} a \sin a\right|\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n}\end{matrix}};$$

en effet, réduisant les déterminants comme dans les cas précédents, cette formule reprend sa forme primitive.

Mais en faisant dans la formule (7) $a_{2n-1} = 0$, tous les éléments de la $(2n-1)^{\text{ième}}$ ligne du déterminant au numérateur deviennent zéro, excepté celui de la $n^{\text{ième}}$ colonne, qui est $\cos a_{2n-1}$ et devient égal à l'unité; ce déterminant deviendra donc égal à celui que l'on obtient en effaçant cette ligne et cette colonne, multiplié par $(-1)^{2n-2} \times (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$.

Au dénominateur tous les éléments de la dernière ligne deviennent zéro, excepté le premier; il sera donc égal au déterminant obtenu en rayant cette ligne et cette colenne, et aura le même signe que le déterminant primitif. De plus, les deux déterminants réduits sont divisibles par le produit $\sin a_1 \sin a_2 \ldots \sin a_{2n-2}$, en sorte que l'on aura

$$\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n-2}) = (-1)^{n-1} \times$$

$$\left| \frac{1 \;.\; \sin^2 a \ldots \sin^{2n-4} a \;.\; \sin a \cos a \;.\; \sin^3 a \cos a \ldots \sin^{2n-3} a \cos a}{\sin a \;.\; \sin^3 a \ldots \sin^{2n-3} a \;.\; \cos a \;.\; \sin^2 a \cos a \ldots \sin^{2n-4} a \cos a} \right| \begin{array}{l} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-2} \\ \hline a_1 \\ \vdots \\ a^{2n-2} \end{array}$$

ou, changeant n en $n+1$,

$$\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n}) = (-1)^{n} \times$$

$$\left| \frac{1 \;.\; \sin^2 a \ldots \sin^{2n-2} a \;.\; \sin a \cos a \;.\; \sin^3 a \cos a \ldots \sin^{2n-1} a \cos a}{\sin a \;.\; \sin^3 a \ldots \sin^{2n-1} a \;.\; \cos a \;.\; \sin^2 a \cos a \ldots \sin^{2n-2} a \cos a} \right| \begin{array}{l} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n} \\ \hline a_1 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{array} \ldots (8)$$

DELFT, Octobre 1880.

SUR LES PRODUITS DE L'ACTION

DU

PENTACHLORURE DE PHOSPHORE SUR L'ACROLÉINE,

PAR

P. VAN ROMBURGH.

MM. Hübner et Geuther [1]) ont, les premiers, fait agir le pentachlorure de phosphore sur l'acroléine. Outre le chlorure d'acroléine $C H_2 = C H - C H Cl_2$, ils obtinrent quelques autres produits chlorés, dont M. Geuther fit plus tard [2]) une étude spéciale. En premier lieu, il décrivit un corps ayant la même composition que le chlorure d'acroléine, mais bouillant à 102°, qu'il regarda comme identique au glycide dichlorhydrique de Reboul [3]). Ensuite, il réussit encore à isoler un corps de la composition $C_3H_5Cl_3$, qu'il admit être la trichlorhydrine ordinaire.

En m'occupant, il y a quelque temps, de la préparation du chlorure de l'acroléine, je recueillis une assez grande quantité de ces produits chlorés à point d'ébullition supérieur, et comme ils montraient des caractères un peu différents de ceux qu'avait indiqués M. Geuther, je les soumis à un examen plus approfondi, examen justifié d'ailleurs par la circonstance que, au même moment, M. Krestownikoff [4]) publiait une nouvelle opinion au sujet de ces

[1]) *Ann. d. Chemie u. Pharm.*, t. CXIV, p. 36.

[2]) *Jenaische Zeitschr. f. Med. u. Naturwiss.*, t. I, p. 265.

[3]) *Ann. de chim. et de Phys.*, t. LX, p. 38.

[4]) *Bull. de la Soc. chim.*, t. XXXIII, p. 535.

produits. Avant de communiquer le résultat de mes recherches, je présenterai quelques remarques sur la préparation de l'acroléine, dont une assez grande quantité m'était nécessaire.

La méthode que je suivis pour obtenir l'acroléine fut celle de Redtenbacher, consistant, comme on sait, à chauffer la glycérine avec du sulfate acide de potassium. J'appliquai la modification indiquée par M. Claus, et traitai donc successivement, dans le même matras, plusieurs portions de matière. Voici comment j'opérais. Dans un matras à fond rond, d'environ 1,^{litre}5 de capacité, j'introduisais 100 grammes de bisulfate de potassium et 50 grammes de glycérine (soumise préalablement à une température de 170°), puis je chauffais le mélange sur un fourneau de Wiesnegg. Le matras était relié à un réfrigérant, qui débouchait dans un récipient, auquel était adapté un tube communiquant avec la cheminée. Je n'introduisais ni chlorure de calcium ni oxyde de plomb dans le récipient refroidi à la glace, mais, la réaction terminée, je versais le liquide distillé, qui formait deux couches, dans un entonnoir à robinet, et laissais s'écouler la couche aqueuse inférieure. Le liquide surnageant était placé dans la glace. Ensuite, un nouveau mélange de 100 gr. $KHSO_4$ et 50 gr. de glycérine était introduit dans le matras encore chaud, et chauffé à son tour. De cette manière, la première portion seule produit des écumes; plus tard l'action s'apaise, et l'on peut aisément traiter, dans le même matras, 300 grammes de glycérine. Le liquide aqueux, qui formait les couches inférieures du produit, était distillé au bain-marie, et l'acroléine ainsi retirée, en quantité encore assez considérable, de la solution aqueuse, était ajoutée au reste de la substance. Cette acroléine, encore un peu aqueuse et chargée de beaucoup d'acide sulfureux, était agitée avec de l'oxyde de plomb [1]), puis rectifiée et reçue dans un récipient contenant

[1]) Il est très difficile d'enlever tout l'acide sulfureux au moyen de l'oxyde de plomb, et, quand on y réussit, un autre inconvénient se présente, à savoir que l'acroléine se polymérise beaucoup plus facilement.

du chlorure de calcium; le récipient, bien bouché, était alors placé dans un endroit frais, ou bien entouré de glace.

Le lendemain, l'acroléine était séparée du chlorure de calcium par la distillation, puis immédiatement soumise au traitement qu'on avait en vue. Le rendement en acroléine pure s'élevait à 33—35 % de la glycérine employée. Examinée dans un tube de 200 millimètres de longueur, l'acroléine se montrait complètement inactive sur la lumière polarisée.

Par le procédé qui vient d'être décrit, je me procurai 1kg.,5 d'acroléine, que je soumis à l'action du pentachlorure de phosphore. L'acroléine fut versée goutte à goutte sur le chlorure en excès, contenu dans une cornue refroidie au moyen de la glace. Le produit de la réaction, mélange d'oxychlorure de phosphore avec les chlorures formés, fut chauffé à 120°, pour en séparer les parties bouillant à une température inférieure; le liquide passé à la distillation, ainsi que le résidu de celle-ci, furent alors agités avec une grande quantité d'eau froide, pour décomposer l'oxychlorure de phosphore. Lorsqu'on a employé un excès de PCl_5, le produit bouillant au-dessus de 110° n'est que peu coloré; dans le cas contraire, il devient brun foncé, et parfois même il y a carbonisation.

Le liquide lourd obtenu par le lavage du produit de la distillation fut agité avec une solution étendue de carbonate de sodium, pour le débarrasser de l'acide chlorhydrique et de l'acide phosphorique, lavé ensuite encore une fois avec de l'eau et séché sur le chlorure de calcium fondu.

Le liquide oléagineux provenant du traitement par l'eau du résidu de la distillation fut distillé à l'aide de la vapeur d'eau, puis séché par le chlorure de calcium.

De cette manière, j'obtins plus de 1 kilogramme de produits chlorés, qu'il s'agissait maintenant de séparer par la distillation fractionnée. Je commençai par appliquer celle-ci au mélange qui bouillait au-dessous de 120°. La distillation fractionnée fut continuée pendant très longtemps, sans qu'il me fût possible de

séparer un liquide bouillant vers 102°: je n'obtins que du chlorure d'acroléine, bouillant à 85°, et un liquide dont le point d'ébullition se trouvait à 109°—110°.

A. Examen du chlorure d'acroléine.

Le chlorure d'acroléine que j'avais obtenu présentait les caractères essentiels indiqués par M. Geuther. C'est un liquide incolore, d'une odeur analogue à celle du chloroforme, bouillant à 85°. Pour la densité, qui fut déterminée à l'aide de la balance de Westphal, je trouvai 1,177 à 15°, et 1,167 à 25°. M. Geuther a trouvé 1,170 à 24°,5.

L'analyse m'a donné le résultat suivant:

0gr,298, traités par la méthode de Carius, ont fourni: 0gr,772 Ag Cl, correspondant à 64,05 °/₀ Cl, (calculé pour $C_3H_4Cl_2$: 63,96 °/₀).

Le dosage du chlore par la méthode de Carius est une opération pénible, attendu que la matière résiste longtemps à l'action de l'acide nitrique. Il se forme bien, déjà à froid, un précipité de chlorure d'argent, mais la décomposition ne devient complète que si l'on chauffe longtemps et fortement [1]).

La densité de vapeur du chlorure d'acroléine n'ayant pas encore été donnée, je l'ai déterminée par deux voies différentes. En premier lieu, j'appliquai la méthode de M. V. Meyer [2]), avec le perfectionnement qu'y a apporté M. Piccard [3]) pour l'introduction de la matière. L'appareil était chauffé à la vapeur d'eau. J'obtins ainsi des nombres assez concordants, mais plus grands que la densité de vapeur calculée, à savoir:

a. 4,13 *b.* 4,11 *c.* 4,19 (calculé pour $C_3H_4Cl_2$: 3,84).

Pour décider si cette différence tenait à la matière ou bien à la méthode, deux autres déterminations furent effectuées sui-

[1]) Dans le cas actuel, la matière fut chauffée pendant 4 heures à 240°, avec de l'acide nitrique d'une densité de 1,43.

[2]) *Ber. d. Ch. Ges. zu Berlin*, 1880, p. 2253.

[3]) *Ber. d. Ch. Ges. zu Berlin*, 1880, p. 1080.

vant la méthode de M. Hofmann; celle-ci donna des résultats meilleurs:

a). Poids de la matière G = $86^{mg},2$, $t = 100°$, V = $76^{cmc},4$, $h = 530$ mm. (corr.), hauteur du baromètre B = $766^{mm},6$ (corrigé).

b). Poids de la matière G = 86^{mg}, $t = 100$, V = $74^{cmc},5$, $h = 525^{mm},5$ (corr.), hauteur du baromètre B = $765^{mm},7$ (corrigé).

Appliquant à ces données la formule

$$D = \frac{G\,(1 + \alpha\, t)\, 760}{0,1293\,.\,(B - h)},$$

on trouve:

a) D = 3,833 et *b*) *D* = 3,86 (calculé pour $C_3\,H_4\,Cl_2$: D = 3,846).

Il semblait résulter de là que, dans les expériences faites avec l'appareil de M. Meyer, les circonstances n'avaient pas encore été telles qu'il l'aurait fallu pour mettre toutes les molécules en liberté, et l'idée se présentait donc de rechercher si, à une température plus élevée, on ne trouverait pas la densité de vapeur normale. A cet effet, j'employai pour chauffer l'appareil la vapeur de l'acide acétique bouillant (118°), et effectivement j'obtins ainsi des résultats plus satisfaisants:

a) Poids de la matière S = $44^{mg},8$, V = 10^{cmc}, $t = 25°$, B (à 24°) = $763,^{mm}5$
b) " " " " S = 63^{mg}, V = $13^{cmc},9$, $t = 25°$, B (à 23°) = $764,^{mm}$

d'où l'on déduit, par la formule

$$D = \frac{S\,(1 + \alpha\, t)\, 587780}{(B - w)\, V},$$

a) D = 3,89, *b*) D = 3,95 (calculé pour $C_3\,H_4\,Cl_2$: D = 3,846).

B. Examen du produit bouillant à 110°.

Ainsi que je l'ai déjà mentionné, M. Geuther a obtenu un produit accessoire bouillant à 102°, qu'il regarde comme identique au glycide dichlorhydrique de Reboul. MM. Friedel et Silva [1]),

[1]) *Comptes rendus*, t. LXXV, p. 81.

toutefois, trouvèrent, dans le produit de la réaction de la potasse sur la trichlorhydrine, non pas un liquide bouillant à 102°, mais deux produits isomères, de la composition $C_3H_4Cl_2$, dont les points d'ébullition étaient à 94° et 107°.

MM. Kölver et Claus [1]) ont trouvé le point d'ébullition du glycide dichlorhydrique à 94°, tandis que M. Henry a examiné un corps qui bouillait à 97° et auquel il donna la formule $CH_2 = CCl - CH_2Cl$, parce que l'acide sulfurique le transforme en monochloracétone (de même que $CH_2 = CCl - CH_3$ fournit, sous la même influence, de l'acétone).

MM. Friedel et Silva [2]) croient avoir obtenu un isomère du chlorure d'allyle β. chloré, $CHCl = CH - CH_2Cl$, sous la forme d'un liquide bouillant à 107° et possédant une densité de 1,25 à 0° et de 1,218 à 25°. Indépendamment du mode de préparation ci-dessus indiqué, au moyen de la trichlorhydrine et de la potasse, ils en donnent encore un autre, consistant à faire agir l'oxychlorure de phosphore sur la dichlorhydrine symétrique de la glycérine.

M. Hartenstein [3]) a préparé un corps de la composition $C_3H_4Cl_2$ en soumettant cette même dichlorhydrine à l'action de l'acide phosphorique anhydre. Il attribue à ce corps la formule $CH_2Cl - \overset{\parallel}{C} - CH_2Cl$. Nous verrons, plus loin, ce qu'il y a de fondé dans cette opinion. Le point d'ébullition de la matière en question est situé à 109°; la densité est de 1,233 à 17°,5.

Le point d'ébullition du produit obtenu par moi se trouve à 109—110° (corrigé). La densité, déterminée par la balance de Westphal, est de 1,226 à 15°. Les résultats de l'analyse sont les suivants:

0gr,207, brûlés par l'oxyde de cuivre, ont donné 0gr,0709 H_2O et 0gr,2449 CO_2;

0,gr,3356, traités suivant la méthode de Carius, ont donné 0gr,8652 AgCl.

[1]) *Ber. d. Chem. Ges. zu Berlin*, V, p. 358.

[2]) *Ibid.*, V, p. 187—965.

[3]) *Journ. f. pract. Chemie* (N. F.), t. VII, p. 311.

De ces données on déduit:

C . . . 32,27 %			C . . . 32,43 %
H . . . 3,8 „	. Calculé pour $C_3 H_4 Cl_2$		H . . . 3,6 „ .
Cl . . . 63,8 „			Cl . . . 63,96 „

Pour ce corps aussi, le dosage du chlore par la méthode de Carius exige une température très élevée. Ce n'est qu'après avoir chauffé la matière durant 4 heures à 235° que j'obtins de bons résultats.

La détermination de la densité de vapeur, suivant la méthode de Hofmann, donna D = 3,825 (calculée pour $C_3 H_4 Cl_2$: D = 3,846).

Examinée à la lumière polarisée, dans un tube de 40 cm. de longueur, la matière fut trouvée complètement inactive.

A en juger par la densité et le point d'ébullition, ce produit paraît être identique aux dichlorures obtenus, respectivement avec les points d'ébullition 107° et 109°, par MM. Friedel et Silva et par M. Hartenstein.

Pour fixer la structure de ce produit accessoire, je me suis appuyé sur les considérations suivantes. Si la formule est telle que l'admettent MM. Friedel et Silva, $CH_2 Cl - CH = CH Cl$, l'addition du chlore doit donner naissance à un tétrachlorure $C H_2 Cl - C H Cl - C H Cl_2$, tandis que si l'interprétation de M. Hartenstein, improbable à priori, pouvait être exacte, $C H_2 Cl - C - C H_2 Cl$ devrait produire un tétrachlorure $C H_2 Cl - C Cl_2 - C H_2 Cl$, c'est-à-dire le chlorure de propylène α, β. bichloré.

Le premier de ces produits d'addition devra donc être identique à celui qui pourrait vraisemblablement se former au moyen du chlorure d'acroléine et du chlore, le second, à celui qui dérive du chlorure d'allyle α. chloré (glycide dichlorhydrique) sous l'influence du chlore.

M. Hartenstein (*l. c.*) a obtenu, du corps préparé par lui, un tétrachlorure bouillant à 171°, tandis que MM. Pfeffer et

Fittig [1]) indiquent la température de 163° comme étant le point d'ébullition du tétrachlorure dérivé du chlorure d'allyle α. chloré. Le second de ces tétrachlorures ne paraît donc pas être identique au premier, ce qui pourtant devrait avoir lieu si les vues de M. Hartenstein étaient justes.

C. Action du chlore sur le chlorure d'acroléine.

M. Geuther [2]) dit qu'en traitant le chlorure d'acroléine par le chlore il a obtenu des cristaux blancs, „peut-être $C_2 Cl_6$," ajoute-t-il. Dans les circonstances où j'ai opéré, ce résultat ne s'est pas confirmé, même quand le produit d'abord formé restait encore longtemps soumis à l'action du chlore.

J'ai fait traverser par un courant de chlore 20 grammes de chlorure d'acroléine pur. L'absorption a lieu avec production de chaleur, ce qui oblige à refroidir par l'eau froide le matras dans lequel l'action se passe. Lorsque le chlore cesse d'être absorbé, il se dégage un peu de gaz chlorhydrique. L'augmentation de poids répond à la quantité de chlore nécessaire pour changer le chlorure d'acroléine en tétrachlorure. Le liquide obtenu commence à bouillir à 170° et distille presque tout entier entre 170° et 180°. Après quelques distillations j'obtins un liquide incolore, qui, sous une pression barométrique de 756,^{mm}6, bouillait à 179°—180°. La densité était de 1,521 à la température de 15°.

Le dosage du chlore fournit le résultat suivant:
0,$^{gr.}$3186, calcinés avec de la chaux, donnèrent: 1,$^{gr.}$0074 Ag Cl, correspondant à 78,15 % Cl. (Calculé pour $C_3H_4Cl_4$: 78,02 % Cl).

Pour ce chlorure, ainsi que pour les suivants, la méthode de Carius ne peut être appliquée. Chauffé même pendant 5 heures à une température de 240°—250° avec de l'acide nitrique fumant de 1,5 p.s., en présence d'un excès de nitrate d'argent, il n'est pas attaqué.

La densité de vapeur fut déterminée à l'aide de l'appareil

[1]) *Ann. d. Chem. u. Pharm.*, t. CXXXV, p. 359.
[2]) *Ann. d, Chem. u. Pharm.*, t. CXIV, p. 38.

de M. Victor Meyer, dans la vapeur de crésol (200—205°). J'ai trouvé ainsi D = 6,05 (calculé pour $C_3 H_4 Cl_4$: D = 6,3).

D. Action du chlore sur le produit bouillant à 110°.

Un courant de chlore fut conduit dans 40 grammes de ce corps. Ici encore, il faut refroidir par l'eau froide, à cause du fort dégagement de chaleur. Lorsque le chlore eut cessé d'être absorbé, j'arrêtai l'opération et soumis le produit obtenu à la distillation. Au-dessous de 170° il ne passa que quelques gouttes du liquide, dont la presque totalité distilla entre 170° et 180°. Par la distillation fractionnée on ne put obtenir aucune trace d'un liquide bouillant à 163°, pas plus qu'un liquide bouillant à 171°; la plus grande partie de la masse passa, sous une pression barométrique de 756mm,6 (corrigée), entre 179° et 180° (thermomètre entièrement plongé dans la vapeur).

La densité, déterminée au moyen de la balance de Westphal, était de 1,522 à 15°.

Examiné quant à l'action sur la lumière polarisée, dans un tube long de 20 cm, le liquide se montra complètement inactif.

Le dosage du chlore conduisit au résultat suivant:

0gr,230, calcinés avec de la chaux, donnèrent 0gr,7232 Ag Cl, d'où l'on déduit: 77,7% Cl (calculé pour $C_3H_4Cl_4$: 78,02% Cl).

La densité de vapeur, déterminée par la méthode de Hofmann, fut trouvée égale à 6,07 (calculée pour $C_3 H_4 Cl_4$: D = 6,3). Avec l'appareil de V. Meyer, j'obtins D = 6,21.

De l'accord parfait qu'ils présentent sous le rapport du point d'ébullition et de la densité, je crois pouvoir conclure à l'identité des deux tétrachlorures en question, identité à laquelle on pouvait s'attendre à priori et qui conduit à admettre que le produit bouillant à 110° est réellement le chlorure d'allyle β. chloré. Néanmoins, il m'a paru nécessaire de comparer ces chlorures avec le tétrachlorure de Hartenstein, dont le point d'ébullition est indiqué, ainsi qu'il a déjà été dit, comme se trouvant à 171°, mais sans aucune mention de corrections.

E. **Préparation du tétrachlorure de Hartenstein.**

La dichlorhydrine doublement primaire (point d'ébull. 176°) fut versée avec précaution, goutte à goutte, sur l'anhydride phosphorique. Lorsque toute la quantité calculée eut été ajoutée, la cornue fut chauffée doucement, et il distilla un liquide incolore et mobile, qui bouillait à 110° [1]). A travers ce liquide je menai un courant de chlore, et, après distillation du produit formé, j'obtins un liquide incolore, doué de la même odeur que les tétrachlorures que j'avais déjà préparés antérieurement. Le point d'ébullition fut déterminé dans le même appareil et avec le même thermomètre que j'avais employés pour les autres tétrachlorures. Je trouvai ainsi que ce corps bouillait, non pas à 171°, comme l'annonce M. Hartenstein, mais à 180° (thermomètre entièrement plongé dans la vapeur, pression barométrique corrigée: 766mm, 4).

Cette différence dans le point d'ébullition paraît devoir être attribuée en grande partie aux corrections appliquées. En distillant de la manière ordinaire, je trouvai le point d'ébullition de 5° plus bas.

Voulant établir plus sûrement l'identité du produit avec les autres tétrachlorures préparés par moi, je déterminai aussi sa densité, pour laquelle je trouvai à 15° la valeur 1,522, qui s'accorde parfaitement avec celles que m'avaient données ces autres propanes tétrachlorés.

Le résultat du dosage du chlore fut le suivant:
0gr,2655, calcinés avec de la chaux, donnèrent 0gr,8354 Ag Cl, d'où l'on déduit: 77,81 °/₀ Cl (calculé pour $C_3H_4Cl_4$: 78,02 °/₀).

Pour la densité de vapeur, déterminée avec l'appareil de

[1]) Cette méthode ne me donna pas beaucoup de produit. Dans une expérience postérieure, j'essayai d'entraîner la matière formée au moyen de la vapeur d'eau, et à cet effet, la réaction achevée, j'introduisis de l'eau dans la cornue et y fis passer un courant de vapeur. Le résultat, toutefois, fut encore plus mauvais. Cela indique que la réaction donne naissance à une combinaison de l'acide phosphorique, qui par la chaleur se décompose de telle sorte qu'il se forme du chlorure d'allyle β. chloré, tandis qu'avec l'eau la décomposition se fait dans un autre sens.

Victor Meyer, j'obtins 6,4 (calc. pour $C_3 H_4 Cl_4$: D = 6,3).

Les nombres trouvés pour la densité et le point d'ébullition montrent suffisamment que le corps en question est identique aux tétrachlorures dérivés du chlorure d'acroléine et du chlorure d'allyle *β*. chloré. Il doit donc avoir la formule

$$\begin{array}{l} CH_2Cl \\ | \\ CHCl \\ | \\ CHCl_2 \end{array}$$

et être le chlorure de propylidène *α*, *β*. bichloré.

L'opinion de M. Hartenstein, qui attribue au dichlorure obtenu par l'action de l'anhydride phosphorique sur la dichlorhydrine symétrique la formule

$$\begin{array}{l} CH_2Cl \\ | \\ C = \\ | \\ CH_2Cl, \end{array}$$

doit, par conséquent, être rejetée.

J'ai aussi eu l'occasion de comparer ce propane tétrachloré avec celui de MM. Fittig et Pfeffer (voir plus loin), dont le point d'ébullition (déterminé dans le même appareil) a été trouvé entre 165° et 166°, et dont la densité, à 15°, est égale à 1,501.

F. Action du brome sur le chlorure d'acroléine et sur le chlorure d'allyle *β*.chloré.

Le chlorure d'acroléine donne, suivant M. Geuther[1]), un produit d'addition bromé, qui bout vers 220°—221°, et qu'il regarde comme identique au dibromodichloroglycide de M. Reboul. Les recherches de MM. Friedel et Silva rendent toutefois cette identité peu probable.

Dans 20 grammes de chlorure d'acroléine pur je fis tomber goutte à goutte du brome, qui fut lentement absorbé par la

[1]) *Jenaische Zeitschr. l. c.*

matière. Lorsque le brome eut été ajouté en quantité suffisante pour former un dibromure (la masse était colorée par un léger excès de brome), le liquide obtenu fut soumis à la distillation; la température s'éleva au-dessus de 200°, et entre 216° et 221° la masse presque entière distilla. Après quelques distillations j'obtins un liquide incolore, d'une odeur forte, qui, sous une pression de 763mm,8 (corrigée), bouillait entre 219° et 220°. La densité, à 15°, était 2,112.

Le dosage des halogènes conduisit au résultat suivant:

0gr,2802, calcinés avec de la chaux, donnèrent 0gr,6881 AgCl + AgBr, d'où l'on déduit: 85,54 % Cl + Br.

$C_3H_4Cl_2Br_2$ demande: 85,25 % Cl + Br.

Le chlorure d'allyle β. chloré reçut à son tour une addition de brome, qu'il absorba en s'échauffant fortement. Sur 1 molécule en poids de chlorure on employa 1 molécule de brome. Après quelques distillations, la plus grande partie du produit obtenu bouillait entre 220° et 221°, le baromètre étant à 742 mm. (corrigé). La densité à 15° était 2,13.

Le dosage des halogènes fournit les nombres suivants:

0gr,347, calcinés avec de la chaux, donnèrent 0gr,8515 AgBr + AgCl, d'où l'on déduit: 85,5 % Cl + Br;

$C_3H_4Cl_2Br_2$ demande: 85,24 % Cl + Br.

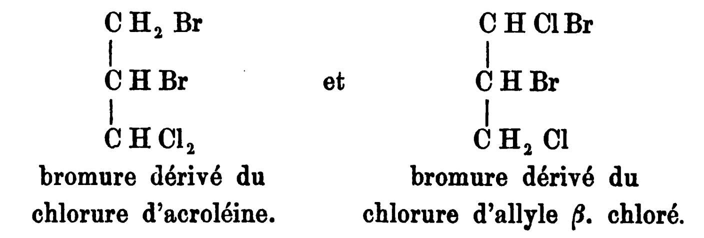
MM. Friedel et Silva [1]) décrivent un produit d'addition bromé, obtenu par eux au moyen du glycide dichlorhydrique bouillant à 107°, comme un liquide ayant son point d'ébullition entre 220° et 225°, tandis que M. Hartenstein [2]) a préparé, à l'aide de son dichlorure d'allylène, un corps qui bouillait à 212°.

Il est à remarquer qu'ici encore, de même que pour le tétrachlorure, le point d'ébullition trouvé par moi est d'environ 9° plus élevé que celui indiqué par M. Hartenstein. Je me crois autorisé, d'après cela, à admettre que les produits d'addition bromés de MM. Friedel et Silva, de M. Hartenstein et de moi, obtenus respectivement au moyen des combinaisons chlorées bouillant à 107°, 109° et 109°—110°, sont identiques.

[1]) *l. c.* [2]) *l. c.*

M. Geuther annonce aussi avoir obtenu, par l'addition du brome au produit accessoire $C_3H_4Cl_2$ bouillant à 102°, un liquide qui bouillait entre 220° et 221° et qui, à 11°, avait une densité de 2,16; tandis que M. Reboul, en soumettant son dichlorglycide à l'action du brome, a obtenu un produit bouillant vers 220°—221° et ayant, à 13°, une densité égale à 2,1. M. Geuther croit, en outre, que les bromures obtenus par lui au moyen du chlorure d'acroléine et du corps appelé glycide dichlorhydrique sont identiques, et que, dans le premier de ces corps, les atomes ont subi un déplacement intramoléculaire.

Les bromures préparés au moyen du chlorure d'acroléine et du chlorure d'allyle β. chloré peuvent avoir les formules suivantes:



bromure dérivé du chlorure d'acroléine. — bromure dérivé du chlorure d'allyle β. chloré.

Si l'on compare les points d'ébullition de chlorures et bromures de composition analogue, pris dans la série du propane, on trouve, comme il ressort des exemples suivants, que, pour chaque atome de brome qui se substitue à un atome de chlore, le point d'ébullition s'élève d'environ 23°, que la substitution ait lieu sur un atome primaire de carbone, ou sur un atome secondaire.

Combinaisons halogénées.	Points d'ébullition.	Différence pour 1 at. Br.
$CH_3 . CH_2 . CH_2 Cl$	46°,5	24°,5.
$CH_3 . CH_2 . CH_2 Br$	71	
$CH_3 . CHCl . CH_3$	36°—38°	24 .
$CH_3 . CHBr . CH_3$	60°—63°	
$CH_3 . CHCl . CH_2 Cl$	97°	22 .
$CH_3 . CHBr . CH_2 . Cl$ / $CH_3 . CHCl . CH_2 Br$	119°	
$CH_2 Cl . CH_2 . CH_2 Cl$	119°	23 .
$CH_2 Br . CH_2 . CH_2 Br$	165°	

$CH_3 . C\,Cl_2 . CH_3$	69°—70°	. . . . 22°,5.
$CH_3 . C\,Br_2 . CH_3$	114°,5	
$CH_3 . CH\,Cl . CH_2\,Cl$ . . .	97°	. . . . 23 .
$CH_3 . CH\,Br . CH_2\,Br$ . . .	143°	
$CH_3 . C\,Cl_2 . CH_3$	70°	. . . . 23 .
$CH_3 . C\,Cl\,Br . CH_3$ . . .	93°	
$CH_2\,Cl . CH\,Cl . CH_2\,Cl$.	156°—158°	. . . . 22 ,5.
$CH_2\,Br . CH\,Br . CH_2\,Br$.	202°—203°	
$CH_2\,Cl . CH\,Cl . CH_2\,Cl$.	156°—158°	. . . . 21 .
$CH_2\,Br . CH\,Br . CH_2\,Br$.	220°	
$CH_2Cl . CHOH . CH_2\,Cl$	174°	. . . . 22 ,5.
$CH_2\,Br . CHOH . CH_2\,Br$	219°	
$CH_2\,OH . CH_2 . CH_2\,Cl$	118°	. . . . 22 .
$CH_2\,OH . CH_2 . CH_2\,Br$	140°	
$CH_2\,Cl . CH{=}CH\,Cl$.	110°	. . . . 21 .
$CH_2\,Br . CH{=}CH\,Br$.	152°	
$CH_2\,Cl . C\,Cl_2 . CH_2\,Cl$.	163°—165°	. . . . 21 ,5.
$CH_2\,Br . C\,Br\,Cl . CH_2\,Cl$	205°—208°	

Il va sans dire qu'on ne doit pas attacher trop de valeur aux données relatives aux points d'ébullition, ni par conséquent à la conclusion qu'on en tire; car ces données proviennent de différents chimistes et n'ont pas été déterminées dans des conditions identiques. Mon seul but, en les citant, a été de montrer que les produits d'addition bromés obtenus par moi, bien qu'ayant à peu près les mêmes points d'ébullition, peuvent fort bien être isomères.

Si l'on compare maintenant les deux corps

$$\begin{array}{c} CH_2\,Br \\ | \\ CH\,Br \\ | \\ CH\,Cl_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} CH\,Cl\,Br \\ | \\ CH\,Br \\ | \\ CH_2\,Cl \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{c} CH_2\,Cl \\ | \\ CH\,Cl \\ | \\ CH\,Cl_2 \end{array}$$

on voit qu'on peut les considérer comme dérivés de ce dernier par la substitution de deux atomes de brome à deux atomes

de chlore attachés, dans les deux cas, l'un à un atome primaire de carbone, l'autre à un atome secondaire. Une surélévation d'environ 44° dans le point d'ébullition doit être la conséquence de cette substitution, et les deux bromures pourront donc bouillir à peu près à la même température, sans pour cela être identiques. Quant à leurs densités, elles diffèrent: celle du premier, dérivé du chlorure d'acroléine, est un peu plus faible que celle de l'autre.

Un exemple analogue d'isomérie est fourni, dans cette même série, par les deux corps

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CHBr \\ | \\ CH_2Cl \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CHCl \\ | \\ CH_2Br \end{array}$$

qui bouillent tous les deux vers 119°—121° et ne peuvent être séparés par la distillation.

Il est donc extrêmement probable que le corps provenant de l'addition du brome au chlorure d'acroléine et au chlorure d'allyle *β.* chloré ne sont pas identiques, mais isomères; les derniers doutes pourront être levés à cet égard en étudiant, par exemple, les produits auxquels ces corps donnent naissance par l'action de la potasse caustique.

De toutes les expériences décrites jusqu'ici, on peut conclure avec certitude que le produit accessoire formé en grande quantité (son poids était à peu près égal à celui du chlorure d'acroléine) ne bout pas à 102° et n'est pas identique au glycide dichlorhydrique ordinaire (chlorure d'allyle *α.* chloré), mais qu'il consiste en chlorure d'allyle *β.* chloré, bouillant vers 109°—110°. Pour me convaincre, toutefois, de l'absence du chlorure d'allyle *α.* chloré dans les chlorures formés, j'ai fait l'expérience suivante.

Dans les fractions du produit qui bouillaient entre 90° et 102°, et dont le poids était de 11 grammes (c'est-à-dire 1°/₀ du poids des chlorures formés), je fis passer un courant de chlore. Le gaz fut absorbé avec dégagement de chaleur. Le produit obtenu

ayant été soumis à la distillation, il ne me fut pas difficile d'en séparer un liquide bouillant à 180°, dont le poids s'élevait à 16 grammes (la théorie en demande 18 grammes); tandis qu'il ne s'était formé aucune trace du tétrachlorure bouillant à 165°, ce qui aurait pourtant dû être le cas si le liquide primitif avait contenu du chlorure d'allyle *α*. chloré. Outre le point d'ébullition 180°, la densité du produit obtenu, pour laquelle je trouvai 1,5, s'accordait également avec celle du chlorure de propylidène *α*. *β*. bichloré déjà décrit.

G. Examen des produits accessoires bouillant à des températures plus élevées.

Les chlorures à point d'ébullition plus élevé, que j'avais purifiés, comme il a déjà été dit, en les distillant avec la vapeur d'eau, furent soumis à une distillation fractionnée longue et minutieuse. La plus grande partie de la masse passa entre 140° et 150°.

J'analysai d'abord la fraction 142°—144°. Le dosage du chlore donna 71,33 % Cl, tandis que $C_3 H_5 Cl_3$ en exige 72,2 %.

Après quelques nouveaux fractionnements, le point d'ébullition de la partie principale se trouva à 144°—146°. L'analyse de cette partie donna 71,43 % Cl.

De nouvelles distillations fractionnées fournirent, comme produit principal, un liquide bouillant de 146° à 148°; mais le dosage du chlore donna encore un nombre qui était trop faible pour $C_3 H_5 Cl_3$, savoir: 71,4 %.

Un résultat analogue a été obtenu par M. Geuther. Ce chimiste, toutefois, pense que le produit en question était de la trichlorhydrine normale, et il attribue la valeur trop faible trouvée pour le point d'ébullition à la présence d'une petite quantité de glycide dichlorhydrique. L'analyse ne s'oppose pas à ce qu'il en soit réellement ainsi. Néanmoins, à en juger par la marche de la distillation, il m'a paru qu'il ne s'était pas formé de trichlorhydrine, car je n'obtins que quelques gouttes d'un liquide bouillant au-dessus de 150°.

Voulant savoir si la présence du corps bouillant à 110° abaisse si fortement le point d'ébullition de la trichlorhydrine normale, j'exécutai l'expérience suivante.

De la trichlorhydrine (point d'ébull. 158°) fut mêlée avec ⅓ de son volume de chlorure d'allyle β. chloré, puis soumise à la distillation fractionnée. Dès la première distillation je pus isoler une assez grande quantité de liquide bouillant à 158°, et après quatre distillations j'avais récupéré la presque totalité de la trichlorhydrine; le chlorure d'allyle β. chloré était beaucoup plus difficile à séparer à l'état de pureté.

Pour débarrasser le liquide du corps bouillant à une température plus basse, le chlorure d'allyle β. chloré, je réunis les fractions recueillies entre 120° et 140°, ainsi que celles obtenues entre 140° et 150°, et je soumis ces mélanges, chacun séparément, à l'action d'un courant de chlore. Le chlorure d'allyle β. chloré est alors transformé en propane tétrachloré, dont le point d'ébullition est à 180°, tandis que la trichlorhydrine ordinaire, en supposant que le liquide en renferme, n'est pas attaquée [1]). Par la présence du tétrachlorure et l'absence du dichlorure bouillant à 110°, le point d'ébullition de la masse principale devrait donc monter jusqu'à 158°, si réellement il y avait mélange de trichlorhydrine ordinaire.

A la suite du traitement par le chlore, le liquide commença à bouillir au-dessus de 140°, et après quelques distillations la masse principale passa de nouveau entre 145° et 150°. De ces fractions je retirai un liquide bouillant de 146° à 148°, dont l'analyse fournit les nombres suivants:

0gr,329, calcinés avec de la chaux, donnèrent 0gr,960 Ag Cl, d'où l'on déduit: 72,16 °/₀ Cl;

0gr,212, brûlés par l'oxyde de cuivre, donnèrent 0gr,0702 H_2O et 0gr,1918 CO_2, correspondant à 3,67 °/₀ H et à 24,66 °/₀ C;

[1]) C'est ce dont je me suis assuré en faisant passer du chlore dans la trichlorhydrine ordinaire, préparée au moyen de la dichlorhydrine et de PCl_5. Après avoir lavé à l'eau et séché par $CaCl_2$, je retrouvai la trichlorhydrine non altérée.

donc:

	trouvé.	calculé.
H . . .	3,67	3,4
C . . .	24,66	24,44
Cl . . .	72,16	72,2

La densité, à 15°, était 1,362 (pour celle de la trichlorhydrine ordinaire je trouvai, à 15°, 1,39).

La densité de vapeur fut déterminée à l'aide de l'appareil de V. Meyer, dans la vapeur d'aniline:

87 milligr. de matière chassèrent 15^cmc d'air d'une température de 18°, sous une pression barométrique de 751 mm (corrigée). On déduit de là, pour la densité de vapeur:

$$D = 4,95 \text{ (calc. pour } C_3 H_5 Cl_3 : D = 5,1).$$

A l'égard de la lumière polarisée, le liquide se montra, dans un tube de 20 cm de longueur, complètement inactif.

Des valeurs obtenues pour la densité et le point d'ébullition je crus pouvoir conclure que j'avais affaire à un isomère de la trichlorhydrine normale. Mais auquel? Voilà ce qu'il s'agissait de savoir.

En effet, différents isomères de la composition $C_3H_5Cl_3$ sont possibles, même quand on admet (ce qui est presque sûr dans le cas actuel) qu'il n'y a pas plus de deux atomes de chlore unis à un seul atome de carbone. Ces isomères possibles sont:

CH_2Cl	$CHCl_2$	CH_2Cl		$CHCl_2$.
|	|	|		|
$CHCl$	$CHCl$	CCl_2	et	CH_2
|	|	|		|
CH_2Cl	CH_3	CH_3		CH_2Cl
(p. d'éb. 158°)	(p. d'éb. 137°)	(p. d'éb. 125°)		

Le dernier de ces isomères n'était pas connu jusqu'ici. On pouvait regarder comme assez probable, toutefois, qu'on l'obtiendrait en traitant par le pentachlorure de phosphore le chlorhy-

drate d'acroléine. M. Krestownikoff [1]) et M. Demarçay [2]) ont émis la même présomption.

L'étude des produits de l'action de la potasse caustique pouvait jeter du jour sur la question que nous avons à résoudre. M. Geuther [3]), il est vrai, mentionne en passant que la combinaison $C_3 H_5 Cl_3$ obtenue par lui donne, au moyen de la potasse, le dichlorglycide de Reboul; mais il n'indique ni le point d'ébullition, ni la densité, ni l'analyse du produit formé.

En considérant les isomères ci-dessus formulés de la composition $C_3 H_5 Cl_3$, il est facile de voir que l'action de la potasse peut donner naissance aux produits suivants:

Avec $CH_2Cl.CHCl.CH_2Cl$ (158°) : $CH_2 = CCl—CH_2Cl$ (94°) et $CHCl = CH — CH_2Cl$ (110°), ce qui a été constaté par MM. Friedel et Silva;

„ $CH_3 — CHCl — CHCl_2$ (137°) : $CH_3 — CCl = CHCl$ (75°), $CH_3 — CH = CCl_2$ (?) et $CH_2 = CH — CHCl_2$ (85°);

„ $CH_3 — CCl_2 — CH_2Cl$ (125°) : $CH_2 = CCl — CH_2Cl$ (94°) et $CH_3 — CCl = CHCl$ (75°);

„ $CH_2Cl — CH_2 — CHCl_2$: $CH_2 = CH — CHCl_2$ (85°) et $CH_2Cl — CH = CHCl$ (110°).

Si la combinaison que j'avais obtenue était: $CH_2Cl - CH_2 - CHCl_2$, il devait donc se former, sous l'influence de la potasse, du chlorure d'acroléine et du chlorure d'allyle β. chloré; et comme les atomes de chlore, quand il y en a deux ou trois unis à un même atome de carbone, offrent une grande résistance à différents agents, il était à présumer que le chlorure d'acroléine serait le produit essentiel de la réaction.

Avant d'exécuter l'expérience dont il s'agit, je m'assurai de l'action de la potasse caustique sur la trichlorhydrine normale. Comme produit essentiel j'obtins un liquide bouillant à 94° (chlorure d'allyle α.. chloré), qui, traité par le chlore, donna le

[1]) *Bull. Soc. chim.*, t. XXXIII, p. 535.

[2]) Würtz, *Dict. de Chimie*, *Suppl.*, fasc. 1, p. 87.

[3]) *Jenaische Zeitschr.*, *l. c.*

propane tétrachloré de Fittig et Pleffer [1]) à point d'ébullition à 165°—166° (therm. entièrement plongé dans la vapeur, sous une pression barom. (corrigée) de 741 mm), tandis qu'avec le brome il fournissait un produit d'addition bromé, bouillant à 208°. MM. Friedel et Silva donnent 205° pour le point d'ébullition de ce corps.

Passant alors à l'examen de mon trichlorure, j'en chauffai doucement 45 grammes avec 20 grammes de potasse réduite en poudre grossière. La réaction se passa comme pour la trichlorhydrine ordinaire; seulement, il parut se dégager aussi quelques produits gazeux, et, en outre, le chlorure de potassium formé était coloré un peu plus fortement en brun que dans le cas de la trichlorhydrine normale.

Le produit distillé fut séché au moyen du chlorure de calcium fondu, puis soumis à une nouvelle distillation. Il commença à bouillir au-dessous de 90°, et entre 90° et 120° on en recueillit une quantité considérable. Ce qui passa au-dessus de 120° fut de nouveau traité par la potasse, et le produit ainsi obtenu fut réuni au premier. Même après cette seconde opération il restait encore du trichlorure non altéré, de sorte que ce corps paraît être plus difficilement attaqué par la potasse que le trichlorure normal.

Après quelques distillations du produit recueilli jusqu'à 120°, la portion qui bouillait au-dessous de 90° était beaucoup augmentée, tandis qu'on ne put obtenir qu'une petite quantité de liquide entre 90° et 100°, et entre 100° et 115°. De la fraction qui passa à la température la plus basse, je retirai du chlorure d'acroléine qui bouillait à 85°.

Le dosage du chlore de cette matière fournit le résultat suivant:

0gr,2836, chauffés pendant 3 h ½ à une température de 235° avec de l'acide nitrique fumant d'une densité de 1,5 (méthode de Carius), donnèrent 0gr,734 Ag Cl, d'où l'on déduit:

63,04 °/₀ Cl ($C_3H_4Cl_2$ exige 63,9 °/₀ Cl).

[1]) *Ann, d. Chem. u. Pharm.*, t. CXXXV, p. 259.

Traité par le chlore, ce liquide se transforma en propane tétrachloré, bouillant à 180°.

Pour me convaincre de l'absence du chlorure d'allyle β. chloré, je fis passer à travers le liquide bouillant de 90° à 115° un courant de chlore, qui fut absorbé avec avidité. Ici encore on obtint la combinaison tétrachlorée bouillant à 180° et d'une densité de 1,5 à 15°, tandis que je ne pus retirer une seule goutte de la combinaison bouillant à 165°, $CH_2Cl—CCl_2—CH_2Cl$.

La réaction avec la potasse fut donc telle qu'on pouvait l'attendre d'un propane trichloré de la composition $CH_2Cl — CH_2 — CH Cl_2$. Le produit essentiel était le chlorure d'acroléine, tandis qu'il ne se forma qu'une petite quantité du chlorure d'allyle β. chloré, qui bout à 110°. Une combinaison bouillant à 75°, $CH_3—CCl = CHCl$, à laquelle pourrait donner naissance l'isomère $CH_3—CHCl—CHCl_2$, ne fut pas rencontrée, de sorte qu'il n'est pas probable que j'aie eu affaire à ce dernier propane trichloré, dont, du reste, suivant MM. Friedel et Silva [1]), le point d'ébullition se trouve à 137°, c'est-à-dire, à plus de 10° plus bas que celui du mien.

Néanmoins, j'ai pensé qu'il y aurait de l'intérêt à préparer synthétiquement, comme terme de comparaison, le chlorure de propylidène β. chloré, ainsi que j'appellerai dorénavant le corps $CH_2 Cl — CH_2 — CH Cl_2$ obtenu par moi.

Dans cette tentative, je fus guidé d'abord par l'idée que le chlorure d'acroléine fixerait peut-être de l'acide chlorhydrique, et que, s'il en était ainsi, l'addition se ferait de la même manière que pour l'acroléine elle-même. Selon M. Krestownikoff [2]), le produit d'addition de cette dernière doit avoir la formule de structure : $CH_2 Cl — CH_2 — C {O \atop H}$.

Je fis donc passer un courant de gaz chlorhydrique sec dans du chlorure d'acroléine sec; il n'y eut ni absorption, ni élévation de température, et, après que l'expérience eut duré quelque temps

---

[1]) *Compt. rend.*, t. LXXIV.

[2]) *Bull. Soc. chim.*, t. XXXIII, p. 535.

et qu'ensuite le liquide fut resté abandonné pendant 24 heures à lui-même, je reconnus que le chlorure d'acroléine n'avait pas subi la moindre altération.

J'eus alors recours à une solution aqueuse saturée d'acide chlorhydrique, avec laquelle le chlorure d'acroléine fut chauffé durant 10 heures, à 100°, dans des tubes de verre scellés. L'opération terminée, le contenu des tubes présentait une coloration brune. Le liquide lourd fut séparé, lavé, séché et soumis à la distillation fractionnée. D'abord il passa un peu de chlorure d'acroléine non altéré, après quoi le thermomètre s'éleva jusqu'à 110°, point où il s'arrêta.

A quelques gouttes près, tout passa au-dessous de 112°, et après quelques distillations la plus grande partie de la masse était séparée sous la forme d'un liquide bouillant à 109°—110°, qui fut reconnu pour du chlorure d'allyle β. chloré. La densité, à 15°, était 1,23.

Le chlorure de propylidène β. chloré, auquel je m'étais attendu, n'avait pas pris naissance. On pourrait croire qu'un déplacement remarquable, intramoléculaire, s'était produit parmi les atomes. Je crus pouvoir l'expliquer en supposant que d'abord, par l'addition de H Cl, il s'était formé du chlorure de propylidène β. chloré, et que ce corps avait de nouveau perdu le H Cl d'une autre manière, de sorte qu'il en était résulté du chlorure d'allyle β. chloré, lequel, comme je l'ai déjà fait remarquer, ne se combine pas avec H Cl. Ces deux actions successives seraient représentées par les équations:

$$\begin{array}{l} CHCl_2 \\ | \\ CH \\ \| \\ CH_2 \end{array} + HCl = \begin{array}{l} CHCl_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2Cl \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} CHCl_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2Cl \end{array} - HCl = \begin{array}{l} CHCl \\ \| \\ CH \\ | \\ CH_2Cl. \end{array}$$

Si les choses se passaient réellement ainsi, il était à présumer que le chlorure de propylidène β. chloré, chauffé avec l'acide chlorhydrique, donnerait également du chlorure d'allyle β. chloré, à moins que, dans la réaction ci-dessus décrite, l'état naissant n'eût joué un rôle.

Je mêlai donc du chlorure de propylidène β. chloré avec de l'acide chlorhydrique fumant, et soumis le tout, dans un tube fermé, à une chaleur de 100° continuée pendant 7 heures. Au bout de ce temps, le contenu du tube était légèrement coloré en jaune clair; la partie lourde du liquide ayant été séparée et soumise à la distillation, on put constater qu'elle consistait en chlorure de propylidène β. chloré, sans modification aucune.

Quand le chlorure d'acroléine est chauffé avec l'acide chlorhydrique, le produit d'addition, encore à l'état naissant, paraît donc éliminer de nouveau, mais d'une autre manière, le HCl d'abord absorbé.

Une autre voie se présentait encore pour obtenir le chlorure de propylidène β. chloré. Suivant M. Krestownikoff, le chlorhydrate d'acroléine est l'aldéhyde β. chloropropionique. En soumettant ce corps à l'action de PCl_5, on pouvait espérer que l'atome O à double soudure serait remplacé par deux atomes de chlore, et qu'ainsi se formerait $CH_2Cl - CH_2 - CHCl_2$, le corps cherché.

M. Geuther a effectué cette réaction, et il affirme avoir obtenu de cette façon la trichlorhydrine normale. Le produit bouillait au-dessous de 150°, ce que l'auteur attribue à la présence d'un peu de dichlorglycide.

Pour me procurer ce corps, je fis agir le pentachlorure de phosphore sur le chlorhydrate d'acroléine. Entre ces deux matières, chose assez surprenante, la réaction est loin d'être violente; pour la mener à terme, on est même obligé de chauffer le mélange au bain-marie. Du produit de la réaction je pus retirer un liquide bouillant entre 140° et 150°, tandis qu'aucune fraction ne bouillait au-dessus de 150°. Pour m'assurer que ce point d'ébullition trop haut ne dépendait pas du mélange d'une certaine quantité de chlorure d'allyle β. chloré, je traitai la fraction 140°—150° par le chlore: même après cette opération, j'obtins un liquide qui bouillait vers 146°—148° (thermomètre dans la vapeur, pression barométrique corrigée = 750 millimètres).

Quarante-cinq grammes de ce liquide furent traités par la potasse. La réaction se passa comme pour le chlorure de propylidène

β. chloré, et du produit je pus de nouveau facilement retirer du chlorure d'acroléine bouillant à 85°, tandis que la fraction 90°—105°, traitée par le chlore, ne me fournit que la combinaison tétrachlorée bouillant à 180°, de sorte qu'il n'y avait pas eu mélange du chlorure d'allyle α. chloré.

Des expériences que je viens de décrire, il suit donc que le propane trichloré qui se forme par l'action du pentachlorure de phosphore sur le chlorhydrate d'acroléine n'est pas la trichlorhydrine normale, mais paraît plutôt être identique à celui qui prend naissance, comme produit accessoire, dans la préparation du chlorure d'acroléine. Ses produits de dédoublement sous l'influence de la potasse établissent, en effet, avec une certitude suffisante, que la formule de structure de ce corps doit être: $CH_2Cl — CH_2 — CHCl_2$. C'est là une nouvelle preuve en faveur de l'opinion qui regarde le chlorhydrate d'acroléine comme l'aldéhyde β-chloropropionique, opinion que M. Krestownikoff avait cru pouvoir déduire d'un autre ordre de faits.

Laboratoire de chimie organique de l'université de Leyde, Février 1881.

SUR

LES SYSTÈMES CHROMATIQUES,

PAR

F. C. DONDERS.

Nous avons à distinguer entre le système chromatique normal, — celui des femmes et de 96 °/₀ des hommes, et les systèmes anormaux, ceux des daltoniens.

Si j'écrivais pour ces derniers, je commencerais par l'explication de leur propre système, ce qui m'offrirait l'avantage de procéder du simple au composé. Vis-à-vis de lecteurs doués d'une vue normale, je dois traiter d'abord du système normal, pour lequel je puis faire appel à leurs propres sensations. Dans cette première partie de mon travail, je négligerai entièrement les faits relatifs à la cécité des couleurs, pour étudier ensuite, d'une manière indépendante aussi, les systèmes des dyschromatopsiques. Ainsi, les uns et les autres seront considérés d'abord à leur propre lumière. Après cela, on pourra juger jusqu'à quel point ils sont en rapport entre eux et peuvent s'éclairer mutuellement.

Je suivrai dans mon exposé la marche historique, à laquelle le sujet se prête par excellence. Nous n'avons qu'à comparer et à relier entre eux les travaux de quelques hommes éminents, pour voir se dérouler, avec une clarté parfaite, le tableau de nos connaissances actuelles. De plus, en présence de la théorie de M. Hering, qui rompt révolutionnairement avec le passé,

le développement historique aura peut-être l'utilité de rappeler les esprits à quelque prudence.

Des recherches faites par moi-même, ou sous mes yeux, je ne communiquerai guère ici que les résultats: les détails en seront publiés successivement.

I. Le système normal.

Outre le blanc et le noir, avec leurs tons intermédiaires gris, l'œil normal distingue une grande variété de couleurs et de nuances ou teintes, dans leurs divers degrés de saturation et d'intensité lumineuse. Toutes ensemble, elles forment une série fermée et se laissent disposer, suivant un ordre déterminé, en un cercle. En partant du vert, on passe par le jaune au rouge et par le bleu au violet, tandis que le rouge et le bleu se relient par les tons pourpres.

M. Chevreul [1]), pour la construction de son cercle chromatique, adopta trois couleurs principales, le *rouge*, le *jaune* et le *bleu*, qu'il plaça à des distances égales (de 120 degrés) l'une de l'autre, et à chacune desquelles il attribua un même nombre (24) de teintes. Le résultat fut que les différences entre deux teintes juxtaposées étaient très inégales et que, sur quelques points, les teintes complémentaires se trouvaient opposées très obliquement l'une à l'autre.

Une autre voie semblait promettre des résultats meilleurs. Je choisis les teintes les plus fraîches de rouge, d'orangé, de jaune, de vert, de bleu et de pourpre, puis, par mélange ou recouvrement (avec des laques), je composai les teintes de passage, d'une manière purement empirique, en cherchant à réaliser les plus petites différences appréciables. De cette façon, j'en obtins une centaine. Toutes ces teintes, en bandes courtes, ayant alors été disposées radialement, à des distances égales, sur une circonférence de cercle, il se trouva, résultat remarquable, que, avec des différences égales entre les teintes successives, les complémentaires

---

[1]) *Cercles chromatiques*, Paris, 1861. Voir aussi: *Mémoires de l'Acad. des sciences*, t. XXXIII, 1861, p. 26.

étaient aussi partout, à très peu près, diamétralement opposées. Un petit écart, en ce sens que le trajet entre deux complémentaires était un peu plus court à travers le bleu qu'à travers le vert, pouvait s'expliquer par la circonstance que le premier a une intensité lumineuse moindre et se mélange plus difficilement.

Dans son *Trattato della Pittura* (1519), Léonard de Vinci consacre deux chapitres aux *couleurs simples*. Le premier (CXXI) nous montre le peintre dans son atelier, mélangeant les couleurs; le second (CLXI) nous découvre le physiologiste ou le philosophe, se rendant compte de ses sensations. Et ici il indique, comme simples, quatre couleurs: le rouge, le jaune, le vert et le bleu. Ces mêmes couleurs, Goethe aussi les met en avant là où il traite de la nomenclature, donc, point digne de remarque, là où la sensation seule décide: — partout ailleurs il est, comme tout le monde, prévenu du fait que trois matières colorantes, une rouge, une jaune et une bleue, suffisent à composer toutes les teintes de la palette. Ce sont aussi les quatre couleurs ci-dessus nommées que M. Aubert [1]) appelle les couleurs *principales*, et que M. Mach [2]) et M. Hering [3]), avec une insistance toute particulière, désignent comme couleurs simples.

Il n'y a pas de meilleur moyen que le cercle chromatique pour se convaincre qu'effectivement quatre couleurs méritent le nom de simples: le rouge, le jaune, le vert et le bleu, — celles-là et pas d'autres. En allant du rouge au jaune, on voit dans toutes les teintes du rouge et du jaune; en allant du vert au jaune, on voit dans toutes les teintes du vert et du jaune; et des deux côtés on aboutit au même jaune, où ne se perçoit ni rouge, ni vert. La même expérience peut être faite, avec le même résultat, par rapport au rouge, au vert et au bleu. En outre, quand l'examen a lieu sans idée préconçue, la grande majorité des sujets indiquent comme simples les mêmes quatre teintes, — beaucoup aussi le même rouge, couleur dont d'ailleurs,

---

[1]) *Physiologie der Netzhaut*, p. 186, Breslau, 1865.

[2]) *Sitzungsberichte der K. Akad. der Wiss.*, t. LII, 1865.

[3]) *Zur Lehre vom Lichtsinne*, Wien, 1878, p. 107. *Sitzungsber.* 15 Mai 1874.

comme Goethe le remarque avec raison, la teinte pure ne se laisse pas déterminer avec la même sûreté. Il va sans dire que dans cet examen on doit éviter avec soin l'influence du contraste et des images accidentelles: dans chaque comparaison, deux ou trois bandes seulement doivent être visibles.

Les cent teintes bien distinctes de mon cercle sont aussi fraîches et aussi vigoureuses qu'il a été possible de les obtenir avec des couleurs à l'huile. Pour chacune de ces teintes on peut maintenant déterminer le nombre des tons de saturation (mélanges avec du blanc [1]), et pour chaque ton de saturation le nombre des degrés d'intensité lumineuse (mélanges avec du noir), que l'œil est capable de distinguer. Mais on ne saurait déduire de là, par simple multiplication, le nombre des impressions susceptibles d'être distinguées. Car, à mesure que décroît la saturation, on voit diminuer le nombre des teintes susceptibles de distinction, et à mesure que décroît l'éclairement, le nombre des tons de saturation. En tenant compte de cette diminution, telle que l'ont fait estimer des combinaisons particulières sur le disque rotatif, je suis arrivé à cinq, tout au plus à six mille impressions perceptibles, chiffre qui reste loin des 30000 auxquelles, suivant une tradition rapportée par John Herschel, se seraient élevés les maîtres mosaïstes du Vatican. En partie, la différence peut s'expliquer par la clarté du ciel italien.

Avec une nomenclature plus arrêtée et plus méthodique, le système de nos sensations chromatiques, dont je viens de donner un aperçu, suffirait à tous les besoins sociaux, à ceux de l'art comme à ceux de l'industrie. Mais la physiologie est plus exigeante. Elle ne se contente pas de la simple distinction des sensations. Elle veut connaître aussi le rapport entre les sensations et le mouvement lumineux dont elles dépendent. Elle étudie les processus que ce mouvement excite dans la rétine, et elle cherche à les suivre jusque dans l'organe central, afin de rendre ainsi compte, sinon des sensations elles-mêmes, au moins de la

[1]) Par le mélange avec du blanc, la couleur elle-même peut éprouver un léger changement, distinct surtout pour l'indigo et le violet.

diversité des sensations. Voilà ce qu'elle demande à une théorie des sensations chromatiques.

La grande découverte de Newton concerne le rapport, — il l'appelle „*strict and very precise*", — entre la réfrangibilité de la lumière et la sensation excitée. Le spectre montrait immédiatement quelle sensation répond à chaque degré de réfrangibilité de la lumière. Dans la découverte était impliquée aussi la production de la sensation du blanc par le concours d'action de toutes les couleurs spectrales. Mais l'impression des mélanges de rayons de réfrangibilité différente, en proportion différente, appelait encore un examen.

Newton s'en occupa, mais sans y consacrer des soins particuliers. Son célèbre cercle chromatique [1]), avec l'ingénieuse application de la construction du centre de gravité, fut plutôt le fruit de la spéculation que de l'expérience: aussi n'a-t-il pu soutenir l'épreuve de cette dernière.

L'étude de Newton se réduisit à constater que le mélange de deux couleurs primaires, à condition qu'elles ne soient pas trop éloignées l'une de l'autre, fait apparaître la couleur intermédiaire: le jaune et le bleu produiraient encore du vert, l'orangé et l'indigo n'en donneraient plus. Il revient en outre, à plusieurs reprises, sur la question déjà soulevée par Huyghens après sa première communication, à savoir, si deux couleurs primaires suffisent à former du blanc. Sans juger la chose impossible, Newton la regarde comme peu probable, mais ne décide rien [2]). Son cercle chromatique la suppose. Le centre représente le blanc, et du blanc devrait donc apparaître lorsqu'en ce point se trouve le centre de gravité de deux couleurs opposées. Mais, justement dans l'explication de son cercle, il avoue n'avoir jamais réussi à obtenir de deux couleurs spectrales un blanc parfait, seulement „*some faint anonymous colour*'.' Ailleurs [3]) il parle de ses

[1]) *Opticks*, 2e éd., 1878, p. 134. Pl. II, fig. 11.
[2]) Voir: *Phil. Transactions*, VIII, 1673, p. 6089.
[3]) *Philos. Transactions*, *ib.* p. 6110.

expériences, mais ne s'en rappelle pas toutes les circonstances, et croit par suite devoir recommander à d'autres de les répéter.

On ne s'est pas hâté de répondre à son appel.

En 1852, seulement, M. Helmholtz [3]) se convainquit que le jaune et l'indigo du spectre donnent du blanc en se combinant, et bientôt après, faisant usage d'une méthode de Foucault, il reconnut qu'il en était de même pour le rouge et le vert-bleuâtre et pour le vert-jaunâtre et le violet, de sorte que le vert pur restait seul sans complément dans le spectre. Il est vrai que ce même résultat avait été trouvé dès l'année 1790, — toujours encore un siècle après l'invitation de Newton, — par Chrétien Ernest Wünsch [4]); mais on peut se demander si celui-ci s'était posé des conditions aussi rigoureuses et s'il avait obtenu autre chose que „*some faint anonymous colour*". — Wünsch avait aussi déjà fixé l'attention sur la différence des résultats suivant qu'on mélange des matières colorantes ou des sortes de lumière, et il avait essayé d'en rendre compte. Mais à M. Helmholtz était réservé l'honneur de trouver l'explication vraie. Celle-ci portait loin. Du moment qu'il était démontré que le vert provenant du mélange du jaune et du bleu préexistait dans ces matières et ne se manifestait pas en vertu de l'addition mais par suite de la soustraction du jaune et du bleu, il ne restait plus rien de la raison spécieuse qui avait fait comprendre le vert parmi les couleurs composées: raison spécieuse, dis-je, car ce n'était pas l'espèce de la lumière, mais la sensation, qui aurait dû servir de critérium du *simple*.

Voilà ce que ne doivent pas oublier ceux qui seraient tentés de bannir à son tour le jaune de la liste des couleurs simples, parce qu'il est formé de deux couleurs *fondamentales*. C'est à celles-ci que nous sommes maintenant conduits par la théorie de Young.

Newton s'était déjà fait une idée de la manière dont la lumière

[1]) *Annalen der Physik und Chemie*, LXXXVI, p. 54, et XCIV, p. 1.

[2]) *Versuche und Beobachtungen über die Farben des Lichtes*, Leipzig, 1792.

agit sur la rétine. Partout, dit-il, où les rayons lumineux rencontrent des surfaces réfringentes solides, ils excitent des vibrations dans l'éther [1]). L'expansion du nerf optique est une pareille surface réfringente, et il doit donc aussi s'y produire des vibrations. Celles-ci, se propageant à travers les „*aqueous pores or crystalline pith of the capillamenta*", atteindraient par les nerfs optiques le sensorium, où elles éveilleraient, suivant leur amplitude et leur composition, la sensation de couleurs différentes.

Plus loin [2]), rappelant la persistance d'action de la lumière, il demande: ne faut-il pas y voir l'effet de vibrations, qui peuvent se transmettre par les fibrilles solides?

A cette question se rattachent les vues émises par Thomas Young [3]). „Si", dit-il, „ce sont des vibrations plutôt que des ondes", et pour la raison donnée par Newton il est porté à le croire, „c'est la nature de la matière qui détermine la rapidité de ces vibrations. Et", continue-t-il, „comme il serait presque inconcevable que chaque point de la rétine contînt un nombre infini de particules, capables de vibrer à l'unisson parfait de tout mouvement ondulatoire possible, nous sommes forcés d'en supposer un nombre limité, par exemple trois pour les trois couleurs fondamentales, et d'admettre que ces particules entrent aussi plus ou moins en vibration sous l'action d'ondes qui ne leur correspondent pas exactement. — Chaque fibre sensible pourra alors être regardée comme composée de trois parties, une pour chaque couleur fondamentale".

A l'origine, Young n'avait pas spécifié ces couleurs: „un nombre limité (de particules)", dit-il, „*par exemple* trois pour les trois couleurs fondamentales": il partageait alors encore l'opinion que le jaune spectral et le bleu spectral formeraient ensemble du vert. Mais plus tard (1802), après la description du spectre par Wollaston, il donne la préférence au rouge, au vert et au

[1]) *History of the Royal Society*, III, p. 262, Londres, 1718, 2e éd. Voir aussi: *Opticks*, *Questio* 13.

[2]) *Questiones* 14 et 16.

[3]) *Philosophical Transactions*, 1802. Lu le 12 nov. 1801.

violet, et dans ses *Lectures* (1807), où sa théorie est exposée avec un peu plus de détails, il reste fidèle à ce choix, en se fondant sur des raisons expérimentales. „Il est certain", y lisons-nous, „que les sensations parfaites du jaune et du bleu sont produites, respectivement, par des mélanges de lumière rouge et verte et de lumière verte et violette, et il y a lieu de supposer qu'elles résultent toujours de cette action mixte". Le rouge, le vert et le violet sont donc des couleurs fondamentales, le jaune, le bleu et le pourpre sont des couleurs intermédiaires, et quant au *blanc*, Young le regarde comme formé, uniquement et exclusivement, de rouge, de vert et de violet.

Evidemment, Young cherche le *critérium des couleurs fondamentales* en ceci, qu'on ne peut les obtenir, au plus haut degré de saturation, que d'une lumière homogène, non d'un mélange de lumières.

Trois formes de vibration dans trois sortes de terminaisons nerveuses, transmises par trois fibres jusqu'au cerveau, et là excitant trois processus, correspondant à trois couleurs fondamentales, le rouge, le vert et le violet, dont la combinaison produit toutes les autres couleurs, ainsi que le blanc: voilà la substance de la théorie de Young!

Déjà 10 ans auparavant, Wünsch, que j'ai cité plus haut, était aussi arrivé à conclure que le rouge, le vert et le violet sont les seules couleurs spectrales qui ne peuvent être formées par d'autres, et il les avait distinguées comme les couleurs principales. Mais, méconnaissant le principe de Newton: „*même réfrangibilité*, *même couleur*", et anticipant sur la doctrine de Brewster, il avait cherché le fondement de la différence de couleur dans trois sortes de lumière, non dans trois formes de sensation: jusqu'à la notion d'énergies physiologiques il ne s'était pas élevé.

Or, c'est là précisement l'essence de la théorie de Young. Cette même notion se trouve au fond des idées de John Herschel [1]), bien qu'il s'en tînt au rouge, au jaune et au bleu

[1]) Voir son intéressante lettre à Dalton, du 20 mai 1833, dans: Henry: *Memoirs of the life and scientific researches of* John Dalton, Londres, 1854.

traditionnels. Mais, à part lui, on citait les noms des couleurs fondamentales de Young, sans soupçonner ce qu'elles impliquaient. Il faut arriver jusqu'à Helmholtz et à Clerk Maxwell, pour que pleine justice soit rendue à la théorie.

M. Helmholtz [1]) reconnut de suite qu'avec la notion des couleurs, comme „qualités fondamentales de la sensation", une base physiologique était acquise. Si à l'origine il lui restait encore quelques doutes quant à la question de savoir si trois couleurs fondamentales étaient suffisantes, bientôt il embrassa la théorie sans réserve et, dans son *Optique physiologique*, établit sur elle l'explication des phénomènes. De son côté, Maxwell [2]) avait donné un exposé aussi lumineux qu'approfondi de la théorie de Young, à laquelle il se ralliait complètement et qu'il prit pour base de ses recherches ultérieures [3]). L'un et l'autre adoptent les couleurs fondamentales de Young, mais en remarquant qu'on pourrait aussi en choisir trois autres quelconques, pourvu qu'elles forment ensemble du blanc. A cet égard, ils n'attendaient alors d'indication positive que de la couleur manquant chez les sujets affectés de dyschromatopsie, et tous les deux trouvèrent comme telle, dans une des formes de cette anomalie, un rouge inclinant légèrement au pourpre: les deux autres couleurs, dit M. Helmholtz, ne peuvent alors pas différer beaucoup de celles que Young a choisies. Maxwell contrôla en outre, par des équations sur le disque rotatif, la construction newtonienne du centre de gravité, et il annonça le projet d'appliquer la même construction aux couleurs spectrales, projet auquel il donna suite en 1860 [4]).

Le plan et l'exécution de ce nouveau travail paraissent également irréprochables. De trois fentes éclairées et laissant tomber leur lumière sur le même prisme Maxwell reçoit dans l'œil trois couleurs différentes, et chaque fois il règle les fentes de telle

---

[1]) *Ann. der Physik*, 1852, t. LXXXVII, p. 49.

[2]) Dans: George Wilson, *Researches on Colourblindness*, Edinb. 1855, p. 153.

[3]) *Transactions of the R. Society of Edinburgh*, 1854, p. 275.

[4]) *Philos. Transactions of the R. Society of London*, t. CL, p. 57.

sorte qu'elles forment un blanc équivalent à un autre blanc vu à côté, provenant de la même source lumineuse (une surface blanche éclairée par le soleil) et réfléchi par un miroir. Naturellement ces triades, toutes égales au même blanc, forment aussi des équations entre elles, et de ces dernières Maxwell déduit que toutes les couleurs spectrales sont produites par le *rouge* (inclinant un peu à l'orangé), le *vert* ($E \frac{1}{4} F$) et le *bleu* du spectre, lesquels doivent par conséquent être regardés comme les sensations fondamentales. L'orangé et le jaune du spectre équivaudraient tout à fait à des mélanges du rouge et du vert fondamentaux. De même, les couleurs intermédiaires entre le vert et le bleu équivaudraient à des mélanges de ceux-ci. Et probablement le rouge spectral extrême naîtrait du mélange du rouge fondamental avec un peu de bleu, et l'indigo et le violet naîtraient du mélange du bleu fondamental avec un peu de rouge. Le critérium des couleurs fondamentales, on le voit, est pour Maxwell le même que pour Young.

A raison de ces résultats, M. Helmholtz aussi crut devoir abandonner le violet, comme couleur fondamentale, en faveur du bleu, tout en souhaitant qu'un nouvel examen spécial eût encore lieu, pour s'assurer si effectivement le jaune spectral parfait peut être composé au moyen du vert jaunâtre et du rouge, et le violet spectral au moyen du rouge extrême et de l'indigo (*Physiol. Optik*, p. 845).

Une couple d'années plus tard, un pareil examen fut accompli, sous sa direction, par M. J. J. Mueller [1]).

Jusqu'alors on avait généralement admis, conformément à la formule de Newton, que, dans le cas du mélange de différentes espèces de lumières, la couleur résultante est toujours plus pâle que la couleur spectrale, et M. Helmholtz s'était aussi prononcé en ce sens, bien que dans ses recherches mêmes (*l. c.*) il y eût de quoi éveiller quelques doutes. Mais les résultats obtenus par M. Mueller, de même que ceux de Maxwell, étaient contraires à la formule en question. M. Mueller constata que, à

[1]) *Archiv f. Opthalmologie*, 1869, t. XV, 2, p. 209.

partir de *b* (vert) jusqu'au rouge extrême, et à partir de *F* (vert bleuâtre) jusqu'au violet extrême, tous les mélanges faisaient apparaître la couleur intermédiaire à l'état de saturation complète. Seulement lorsque le vert (entre *b* et *F*) y était impliqué, la sensation de la couleur résultante cédait en saturation à celle de la couleur spectrale.

Ce résultat s'accorde avec celui de Maxwell en ce point que, entre certaines limites du spectre, le mélange de deux couleurs équivaut à la couleur spectrale. Mais ces limites sont très différentes pour les deux observateurs. A l'égard justement des mélanges dont M. Helmholtz avait recommandé l'étude, M. Mueller trouve le contraire de ce qu'avait trouvé Maxwell. Avec du rouge et du vert on ne peut pas faire du jaune spectral, avec du rouge et de l'indigo, pas du violet spectral. Implicitement, il résulte aussi des recherches de M. Mueller que la combinaison du rouge et du bleu fondamentaux de Maxwell ne saurait produire le rouge spectral extrême.

M. Mueller apporta un soin tout particulier à résoudre la question, si au moyen du rouge et du bleu on peut composer l'indigo et le violet, ainsi que Maxwell l'avait déduit de ses équations. Jamais il ne réussit à en obtenir, même approximativement, l'indigo spectral. A l'égard du violet, le doute était possible. Une différence de clarté paraissait avoir une action compensatrice. Mais, lorsqu'on avait soin que la clarté fût aussi égale que possible, une différence de saturation se découvrait. Si l'on tient compte, en outre, de la fluorescence de la rétine, qui pâlit le violet beaucoup plus que le bleu, on peut conclure, *a fortiori*, que le mélange du bleu et du rouge le cède à l'action directe de la lumière violette: peut-être les résultats de Maxwell se modifieraient-ils en ce sens, si la part de la fluorescence y était faite.

M. Helmholtz, bien qu'encore un peu hésitant [1], comprit maintenant aussi de nouveau le violet parmi les couleurs fonda-

---

[1]) *Populäre wissenschaftliche Vorträge*, 2e fasc., 1871, note de la pag. 47.

mentales. Je crois que ce retour à l'opinion de Young est de tous points justifié. Surtout avec une intensité lumineuse moyenne, la lumière violette composée, même abstraction faite de sa moindre fluorescence, reste incontestablement au-dessous du violet spectral.

Mais, en outre, les couleurs extrêmes du spectre n'apportent-elles pas nécessairement avec elles le caractère du fondamental?

La lumière peut agir de deux manières essentiellement différentes: ou bien elle produit de l'énergie chimique, et n'en fournit que son équivalent; ou bien elle met une molécule en mouvement, et par là donne l'impulsion à un processus dans lequel il se dépense une quantité d'énergie chimique hors de toute proportion avec celle de la lumière. C'est de cette dernière espèce que doit être l'influence de la lumière sur la rétine. S'il en faut une preuve, on la trouve dans les courants qu'on peut dériver de la rétine, même isolée, après une action faible et passagère de la lumière (Holmgren et Kühne). La couche externe de la rétine, tout l'indique, est le point où commence le processus qui, modifié selon la nature de la substance qu'il rencontre sur sa route, se propage jusqu'à l'organe central. C'est dans cette couche externe que nous avons à chercher les molécules sensibles. Et de ces molécules nous devons, conformément aux trois énergies, nous figurer trois sortes, — non pas mêlées entre elles, mais liées à des éléments morphologiques spéciaux [1]), qui ont leurs fibres conductrices propres.

Or, jusqu'à la limite du rouge, les ondes ne produisent absolument aucun effet lumineux. L'absorption de tous les rayons jusqu'à cette limite n'est pas admissible [2]). Peut-on donc supposer que, pour une seule et même longueur d'onde, les trois sortes de molécules se mettent à exécuter des vibrations, — vibrations dont l'intensité, à en juger d'après la situation des maxima, est

[1]) Un argument à l'appui de cette conception est fourni par les cônes rétiniens à globule coloré, sur lesquels il sera prochainement publié un travail de M. Waelchli.

[2]) Voir Fick, dans: Hermann, *Handbuch der Physiologie*, t. III, p. 178.

pour chacune des trois sortes une fonction différente de la longueur d'onde? Au point de vue génétique comme au point de vue chimique, ce serait une énigme. Aussi le rouge extrême conserve-t-il sur une assez grande étendue sa même couleur: et là seulement où cette couleur change d'une manière appréciable, il peut être question de l'entrée en jeu d'une seconde énergie, là où la saturation aussi diminue plus fortement, du concours des trois énergies. Il s'ensuit nécessairement que le rouge extrême représente une des couleurs fondamentales.

Et ce qui est vrai du rouge doit s'appliquer au violet. Si l'ultra-violet n'a plus la couleur caractéristique du violet, cela tient à l'intervention de la fluorescence. A une intensité moyenne, on ne voit pas encore de rouge dans la lumière fluorescente: elle est donc verdâtre. Or cette lumière verdâtre, ajoutée au violet, produit, comme l'a déjà fait remarquer M. Helmholtz, le ton gris de lavande qu'affecte ordinairement la lumière ultra-violette.

Mais si le rouge et le violet sont deux des couleurs fondamentales, la troisième ne peut être que le vert. En effet, le vert ne peut pas être formé par le mélange d'une des autres couleurs avec le rouge ou le violet: il est donc nécessaire. D'un autre côté, le vert seul peut former, par son mélange avec le violet ou le rouge, toutes les autres couleurs: il est donc suffisant. A la vérité, le bleu et le jaune ainsi formés ne sont pas aussi saturés que leurs analogues du spectre, et pour cette raison M. Helmholtz avait d'abord supposé que trois sensations fondamentales ne suffiraient pas; mais la différence s'explique simplement par la circonstance que, dans ces mélanges, le vert introduit plus de violet et plus de rouge que n'en manifestent, respectivement dans le jaune et le bleu du spectre, les courbes des énergies violette et rouge.

Notre argument en faveur du choix des couleurs extrêmes, comme couleurs fondamentales, n'est-il pas contredit, toutefois, par d'autres phénomènes?

Maxwell et Helmholtz admettent, tous les deux pour les mêmes

raisons, que les trois énergies sont actives sur toute l'étendue du spectre. De là dépendrait l'accroissement de saturation des couleurs spectrales après que la rétine a été fatiguée par les couleurs complémentaires, de là aussi les modifications de teinte et de saturation, dans le cas où les couleurs spectrales sont très intenses.

En ce qui concerne l'influence de la *fatigue par les couleurs complémentaires*, je puis confirmer les expériences de M. Helmholtz [1]). Pour le vert et, des deux côtés, aussi loin que les trois énergies sont clairement en jeu, ainsi que pour le violet, sur lequel la fluorescence fait sentir son effet, ce résultat était à prévoir. Mais il s'applique aussi au rouge extrême. Les expériences exigent beaucoup de soin. Le rouge doit être tout à fait homogène, et le vert complémentaire doit confiner à un gris de même intensité lumineuse: s'il confine à du noir ou à du blanc, le rouge qui réagit sur ceux-ci est vu respectivement plus clair ou plus obscur que le rouge réagissant sur le vert bleuâtre, et cette différence de clarté influe sur le jugement relatif à la saturation. Néanmoins, quand toutes les précautions sont observées, le rouge aussi, je le reconnais, est plus saturé. En outre, il prenait distinctement une teinte pourpre en réagissant sur le vert jaunâtre. Mais cela prouve-t-il que le rouge en question éveille dans la rétine les trois énergies? Il me semble que M. Helmholtz a estimé trop bas la lumière propre. Qu'on ferme les yeux après l'action du vert bleuâtre, et l'on verra apparaître un rouge vigoureux à côté du gris. Lors donc qu'on fera réagir de la lumière rouge, ce rouge réagissant devra devenir plus parfait par le rouge propre, plus pâle par le gris propre, — double source de différence. Et si cela ne suffit pas pour expliquer le phénomène, il y aurait, comme j'espère le montrer ailleurs, des raisons d'admettre que la différenciation des sensations centrales n'est pas encore complète (résidu de blanc dans chaque énergie), plutôt que de recourir à un concours d'action de trois énergies distinctes émanant de la périphérie.

[1]) *Physiologische Optik*, p. 370.

Le *décroissement de la saturation* des couleurs, à mesure que leur intensité augmente, n'est pas non plus une difficulté pour ma manière de voir. Pour le vert et les couleurs voisines, ainsi que pour le violet, couleurs auxquelles sont intéressés les trois processus périphériques, il y a lieu d'admettre l'explication proposée par Helmholtz et Maxwell: que, l'intensité augmentant, le processus dominant ne peut pas croître dans le même rapport que les deux autres. Mais un second facteur, qui se fait valoir également sur le rouge, doit être cherché dans l'organe central. Les couleurs fondamentales ne sont pas des couleurs simples. Le violet est composé des sensations du bleu et du rouge, le rouge spectral de celles du rouge et du jaune: dans le rouge qui est assez clair pour pouvoir servir à l'expérience (entre *B* et *C*), il y a incontestablement du jaune. Or, quand l'intensité lumineuse augmente, la couleur la plus faible, le jaune, doit ressortir davantage: et nous voyons, en effet, que le rouge spectral incline alors plus au jaune, ce qui implique le pâlissement.

Notons, en outre, qu'une couleur quelconque, s'épuisant elle-même et évoquant sa complémentaire, commence à pâlir dès son apparition, et cela d'autant plus rapidement que son intensité lumineuse est plus grande: de sorte que, à proprement parler, une couleur claire n'est jamais observée, durant un temps appréciable, dans la plénitude de sa saturation.

Pour ce qui regarde enfin le *changement de couleur* que le rouge subit dans le cas où son intensité est très forte, il en est déjà rendu compte dans ce que nous venons de dire.

Il n'y a donc aucune raison pour croire que dans ce rouge et ce violet extrêmes il y ait à l'œuvre plus d'*une* énergie: et, ces deux couleurs fondamentales admises, nous avons déjà vu que le vert seul peut prétendre à la dignité de troisième.

A ce même résultat ont conduit les recherches de M. Von Kries et[1])

---

[1]) *Beitrag zur Physiologie der Gesichtsempfindungen*, dans: *Archiv f. Anat. u. Physiol.*, 1878, p. 503.

et de M. Diro Kitao [1]), provoquées par la théorie de M. Hering. Je dois me borner ici à les signaler, attendu que les méthodes suivies, et même le principe de ces méthodes, sont trop compliqués pour qu'on puisse les faire comprendre en peu de mots. Les résultats des derniers travaux de M. Bruecke [2]) ne s'éloignent pas beaucoup non plus de ces mêmes conclusions: il est seulement porté, avec M. Exner, à comprendre parmi les couleurs fondamentales non pas le violet extrême, mais un violet bleuâtre.

La longueur d'onde exacte du vert fondamental est difficile à déterminer. M. Mueller suppose qu'on doit regarder comme tel le vert qui, par son mélange avec le rouge et avec le violet, affaiblit au même degré la saturation de ces deux couleurs. Cette supposition me semble de tous points justifiée. Mais M. Mueller reconnaît lui-même que la détermination ne peut se faire d'une manière exacte. Approximativement, il a trouvé $\lambda = 0{,}5063\,\mu$. Par des méthodes entièrement différentes, M. Bruecke et M. Kries sont arrivés à peu près au même résultat.

Un fait digne de remarque, c'est que dans le spectre d'interférence le rouge, le vert et le violet s'accusent si fortement. Au premier coup d'œil, on ne voit que ces trois couleurs. La raison en est, évidemment, que, dans le spectre d'interférence, elles restent, sur une largeur relativement grande, sensiblement inaltérées, pour se lier par des bandes de passage étroites, qui, en outre, sont moins saturées que les couleurs fondamentales [3]). Ajoutons que les trois couleurs fondamentales y occupent à peu près une largeur égale, que le jaune y est surpassé par le vert en intensité lumineuse, et que, sous ce même rapport, le violet a beaucoup gagné par son rétrécissement considérable. Evidem-

[1]) *Zur Farbenlehre*, Berlin, 1878. Expériences avec le *leucoscope* de Helmholtz: Voir le compte rendu de M. van Kries, dans: *Beiblätter zu d. Ann. der Physik. u. Chemie*, t. IV, p. 51.

[2]) *Ueber einige Empfindungen im Gebiete der Sehnerven*, dans: *Sitzungsberichte*, 28 févr. 1878. *Ueber einige Consequenzen der Young-Helmholtz'schen Theorie*, dans: *Sitzungsberichte*, 3 juill. 1879.

[3]) Voir Mandelstamm, dans: *Archiv f. Ophthalm*, t. XII, p. 406.

ment il y dans cette prédominance du rouge, du vert et du violet un indice de leur caractère fondamental.

Nous avons distingué des couleurs fondamentales et des couleurs simples, et il nous reste maintenant encore à examiner quelle relation existe entre les unes et les autres.

Les couleurs simples, nous avons appris à les connaître en consultant uniquement nos sensations. Nous avons été ainsi conduits au rouge, au jaune, au vert et au bleu.

Dans tout processus psycho-physique on a admis, tant qu'il était question de semblables processus, sinon l'identité, au moins la correspondance absolue de l'élément psychique et de l'élément physique. Pour Fechner, ils sont entre eux comme le côté concave et le côté convexe de la même courbe. Nous postulons en conséquence, de même que MM. Mach et Hering, quatre processus spécifiques correspondants, non compris ceux des sensations du blanc et du noir.

Tout nous porte à chercher le siège de ces processus dans les sphères optiques de la substance grise, où, d'après l'importante découverte de M. Mach, la couche percevante de la rétine est représentée point pour point et où ses processus se reflètent, par conséquent, dans les mêmes rapports de lieu. Dès l'abord, toutefois, je dois signaler une différence essentielle. Dans la couche percevante de la rétine, nous avons rattaché les processus différents à des formes différentes. Il y avait pour cela des raisons directes. En outre, admettre plus d'*un* processus dans la même forme, ce serait supposer plus d'*un* processus de transmission dans la fibre correspondante, hypothèse contre laquelle la physiologie désire maintenir son *veto*. Mais, dans le domaine directement psychophysique des sphères optiques, rien n'empêche de lier à une même forme plusieurs processus, qui y seraient éveillés par des fibrilles aboutissant à des points différents. Bien au contraire, les phénomènes nous y poussent. Du concours de deux couleurs peut résulter une troisième couleur, dans laquelle aucune des deux n'est visible: par exemple le jaune, du concours du rouge et du vert; des deux processus il doit donc naître un troisième processus, *sui generis*.

Evidemment, cela ne peut avoir lieu qu'au point où les deux processus s'accomplissent, dans la même substance, dans la même forme. Et l'analogie nous porte à rattacher aussi aux mêmes formes la combinaison de deux processus dont les sensations correspondantes ne se fusionnent pas, mais restent, comme le rouge et le jaune par exemple, visibles dans la couleur composée. D'ailleurs, la combinaison des impressions chromatiques des deux yeux fournit la preuve qu'elle peut s'opérer dans le centre.

Aux sensations, considérées en rapport avec les conditions de leur production, est ensuite empruntée l'idée que nous nous faisons des processus psycho-physiques et de leurs relations mutuelles.

De même que les processus vitaux en général [1]), les processus psycho-physiques peuvent être regardés comme des phénomènes de dissociation non réversibles. A la sensation du blanc est liée la dissociation complète des molécules, telle que, sous l'influence de la totalité des rayons solaires, elle s'est développée et ne pouvait manquer de se révéler. Elle peut être dite complète, parce que les molécules, nées de ces dissociations, ne sont pas susceptibles d'une dissociation ultérieure. Ce qui le prouve, c'est que, avec une intensité moyenne, la sensation du blanc peut persister sans changer de nature et sans disposer à des sensations secondaires. Pendant un temps assez long elle peut même rester quantitativement la même, une lumière modérée réalisant les conditions dans lesquelles la consommation (dissociation) des molécules et leur production sous l'influence de la nutrition se contrebalancent. Supprime-t-on maintenant la lumière, la sensation passe peu à peu au noir, toujours sans changer de qualité. Durant ce passage, le nombre des molécules augmente par la prépondérance de la production, et il se manifeste une plus grande tendance à la dissociation. Finalement, la production et la consommation peuvent ainsi devenir égales, toutes les deux étant en outre réduites à un minimum: la sensation approche alors du noir, tandis que le noir parfait ne se présente que localement, sous

[1]) Voir *Dissociation dans le sang et dans les tissus*, dans: *Compte-rendu des séances de l'Association française à Lille*, 1874, p. 842.

l'influence du contraste. Dans cet état, la sensibilité a atteint son maximum, et une excitation lumineuse locale, croissant à partir de zéro, provoque tout d'un coup un phénomène lumineux bien distinct, qui persiste ensuite même si la lumière est affaiblie, mais qui disparaît subitement quand on la supprime ou quand on la diminue outre mesure. Entre la lumière plus réfrangible et moins réfrangible se manifeste ici cette différence, que la première a besoin de beaucoup moins d'énergie que la seconde pour éveiller une sensation, qu'elle la fait aussi apparaître plus brusquement, et que le blanc y domine davantage [1]). Tout dénote que, en vertu de la nature des molécules que l'organe produit, la sensation du blanc est propre à son énergie neutre, — qui est en même temps son énergie totale. Par là il est rendu compte de sa tendance à développer cette sensation.

Quant aux sensations des couleurs simples, nous les lions à des dissociations partielles de ces mêmes molécules. Contrairement à la sensation du blanc, qui se maintient sans changement, toute sensation colorée éveille sa complémentaire, d'emblée et avec une force croissante. Le pâlissement de la couleur en est la conséquence. Si elle occupe tout le champ visuel, la couleur finit par ne presque plus être perçue: la sensation devient neutre. L'explication est que, de la dissociation (partielle) primaire il reste des molécules, dont la dissociation secondaire développe la sensation complémentaire. Ces molécules se dissocient peu à peu spontanément, même sans stimulant adéquat; néanmoins, elles prédominent de plus en plus, de sorte que finalement, l'égalité étant survenue entre la dissociation directe et la dissociation indirecte, il s'établirait un état d'équilibre, avec sensation neutre. C'est ainsi que l'organe revendique son énergie complète. Si alors l'œil reçoit de nouveau de la lumière blanche, la couleur complémentaire se fait immédiatement valoir avec plus de force, jusqu'à ce que,

[1]) Nos expériences sur la sensibilité aux rayons de différentes longueurs d'onde, après un séjour dans l'obscurité, et sur l'impression de ces rayons, seront publiées prochainement. Une grande sensibilité dénote dans les molécules un équilibre très instable, par suite duquel le processus partiel (sous l'action d'une stimulant spécifique) se transforme aisément en processus total.

par la disparition des molécules secondaires, l'équilibre soit rétabli.

Certains processus partiels peuvent coexister l'un à côté de l'autre. Nous en voyons la preuve dans les couleurs composées, où nous reconnaissons deux couleurs simples: le jaune peut se combiner soit avec le vert, soit avec le rouge; le vert avec le jaune et avec le bleu; le bleu avec le vert et avec le rouge; — en tout quatre combinaisons, grâce à l'intervention desquelles l'ensemble des couleurs forme un cercle fermé. Ces combinaisons dépendent chacune de deux formes de dissociation partielle, qui affectent les mêmes molécules, sans aboutir à une dissociation totale. Si, au contraire, le vert et le rouge, ainsi que le jaune et le bleu, ne forment pas de couleur composée, c'est que ces paires sont à peu près complémentaires et ne peuvent donc laisser dans leurs mélanges blanchâtres que celle des deux couleurs qui prédomine. Tout ceci dérive du rapport entre les couleurs fondamentales et les couleurs simples; c'est à cet examen que nous passons maintenant.

Nous avons appelé couleurs fondamentales celles qui représentent des processus simples à la périphérie. Mais rien ne s'oppose à ce qu'au centre elles excitent un processus double et soient par conséquent des couleurs composées. C'est ainsi que le rouge spectral serait composé de rouge et de jaune, le violet spectral, plus distinctement, de bleu et de rouge, et peut-être le vert fondamental n'est-il pas non plus identique au vert simple.

Quant à la façon dont les couleurs fondamentales, primaires, se combinent pour former des couleurs simples, la succession des teintes du spectre nous le montre.

Le rouge spectral, composé de rouge et peut-être d'une trace de jaune, est excité, comme tel, par le processus fondamental primaire qui s'effectue dans la rétine.

A mesure que s'y joint le second processus primaire, celui du vert fondamental, la combinaison se rapproche du jaune, et dans le jaune pur, processus spécifique simple, se réalise l'équilibre des deux énergies. Si ce jaune est un peu moins saturé,

cela prouve seulement que les deux énergies, conformément à la tendance à former du blanc, font aussi subir à une partie des molécules sensibles une dissociation totale, ce que chaque énergie fait déjà plus ou moins pour son propre compte. Du rouge au jaune la saturation diminue graduellement; du vert au jaune, dans une mesure moindre (le contraire serait même possible), parce que le vert, moins saturé, s'efface de plus en plus, à mesure qu'on s'approche du jaune.

Du jaune au vert, la seconde énergie, celle du vert, acquiert graduellement la prépondérance, pour trouver son expression la plus pure là où le rouge et le violet existent dans la proportion nécessaire pour contribuer à la formation de blanc, — blanc qui tempère à un certain degré le vert fondamental.

Au-delà du vert se fait valoir de plus en plus le violet. Dans le bleu pâle, simple, le vert et le violet trouvent leur équilibre. Le bleu se voit dans l'énergie violette beaucoup plus distinctement que le jaune dans la rouge. Par le fusionnement de l'énergie verte avec le rouge de la violette, le bleu arrive déjà à une expression assez complète. Le défaut de saturation peut s'expliquer (de même que pour le jaune) par la tendance à la dissociation totale, qui résulte du concours de deux énergies. — De l'autre côté de ce bleu, l'énergie violette devient peu à peu dominante, pour apparaître dans sa teinte pure à la limite du vert fondamental. La saturation du violet serait encore plus parfaite si la fluorescence, tant celle des milieux de l'œil que celle de la rétine elle-même, ne lui portait préjudice.

Le rouge fondamental, par une faible coopération de l'énergie violette, passe au rouge simple. De ces deux mêmes énergies naissent aussi les teintes pourpres, qui manquent dans le spectre et qui cèdent en saturation tant au rouge fondamental qu'au violet fondamental [1]).

Ce qui précède donne une idée de la manière dont les quatre couleurs simples dérivent des trois énergies.

[1]) Les différentes couleurs des spectres d'interférence, obtenus de deux fentes lumineuses, peuvent être amenées à se recouvrir dans l'œil, libre ou armé du microscope. La méthode et les résultats seront communiqués plus tard.

Dans les couleurs fondamentales nous avons vu l'effet de la lumière atteindre sa plus haute spécificité, et cela, au moins pour le violet et peut-être aussi pour le rouge, en leur qualité de couleurs composées, à la fois dans deux directions.

Du concours de deux énergies résultent ensuite les couleurs simples, le rouge, le jaune et le bleu (ainsi que le vert simple, s'il n'est pas une des énergies), — toutes déjà plus pâles que les énergies elles-mêmes.

Enfin, du concours des trois énergies, dans une proportion déterminée, naît le blanc, neutre et incolore.

Ainsi, partout où il y a plus que simple combinaison, partout où il y a fusionnement, — *simplification graduelle*, *jusqu'à la neutralité complète.*

Le pâlissement des couleurs et autres phénomènes secondaires, qui se produisent à la suite de l'excitation prolongée, ont été expliqués ci-dessus par le processus central dans les sphères optiques. En dernière instance, c'est indubitablement là, ou même plus haut encore, qu'il faut en chercher la cause. Néanmoins, il est à peine besoin de dire que les conséquences de l'excitation, action secondaire positive et diminution d'excitabilité, s'observent déjà dans les éléments périphériques de la couche percevante et, en ce sens, n'ont dans l'organe central qu'une origine secondaire. Mais, indépendamment de celles-là, il se développe ici une action primaire, qui prédomine dans le contraste simultané et dans l'induction lumineuse, et qui ne fait pas non plus défaut dans le contraste successif et dans les images accidentelles. Plus tard, j'entrerai peut-être dans plus de détails à ce sujet.

La théorie que je viens d'esquisser ne rencontre, ce me semble, aucune difficulté sérieuse. Elle se laisse aussi, comme nous l'avons vu, ramener sans effort à des processus de nutrition et de dissociation. Sans doute, il serait plus simple de pouvoir regarder les couleurs simples comme les couleurs fondamentales. Mais, en ce qui concerne la connexion des phénomènes vitaux, qu'on ne se fie pas au *simplex veri sigillum.* Nous sommes arrivés

aux énergies en considérant les sensations dans leur rapport avec la lumière qui les produit. A cette lumière doivent correspondre les processus dans la rétine. Qu'on essaie d'unir ici aux quatre couleurs simples quatre processus spécifiques, et de déduire de ceux-ci les couleurs du spectre: immédiatement on se heurtera à des obstacles insurmontables. Du reste, la démonstration des trois énergies était d'elle-même exclusive.

Les trois énergies sont et restent donc les pierres angulaires de la table chromatique, telle que Maxwell l'a conçue, d'après le principe de Newton. Chaque couleur y trouve sa place, suivant la construction du centre de gravité. Seulement, une certaine importance est accordée au fait que le jaune, qui tombe à peu près sur la ligne joignant le rouge et le vert, est une couleur propre, que nous ne pourrions pas nous représenter comme née de leur fusionnement, si nous ne la voyions pas. D'ailleurs, on se tromperait en croyant que la place occupée sur la table chromatique décide de la sensation. Elle indique *seulement*, ainsi qu'il ressort du mode de construction, que *les excitations lumineuses*, *dont dépendent les processus de trois couleurs-types données*, *sont suffisantes aussi*, *et dans quelle proportion elles sont suffisantes*, *pour déterminer les processus propres à toutes les autres couleurs:* quant à savoir si ces processus ne font que se combiner, ou bien si leur concours donne aussi naissance à des processus nouveaux, à cet égard elle ne suppose rien, et par conséquent rien non plus au sujet des couleurs résultantes, en tant que *sensations*. Mais le fait est que, outre le blanc et le noir, il y quatre couleurs simples, et qu'entre celles-ci on ne peut pas non plus distinguer plus de quatre couleurs de passage: tel est le système de sensations avec lequel nous avons à compter.

Si notre théorie ne soulève pas de difficultés, dans sa généralité réside une imperfection, que nous ne devons pas nous dissimuler. De processus spécifiques elle ne sait nous dire que ce que lui fournissent, conjointement avec les sensations, les processus nutritifs en général, et la morphologie, celle de la périphérie non moins que celle du centre, est riche en hiéro-

glyphes, témoins irrécusables de notre ignorance. Aussi ne présentons-nous cette théorie que comme un essai, destiné à relier d'une manière satisfaisante les faits connus et à marquer ainsi la voie à suivre dans les recherches ultérieures.

C'est là-dessus qu'elle fonde son droit à l'existence.

II. Les systèmes simples.

Notre connaissance des systèmes simples commence avec la description donnée par John Dalton de ses sensations chromatiques anormales [1]).

Il débute par le spectre.

„D'autres", dit-il, „voient dans le spectre six couleurs: le rouge, l'orangé, le jaune, le vert, le bleu et le violet: moi je n'en vois que deux, que je serais tenté d'appeler le *jaune* et le *bleu*, ou tout au plus trois, — le jaune, le bleu et le violet". „Mon *jaune*", continue-t-il, „comprend le rouge, l'orangé, le jaune et le vert des autres. Leur rouge est pour moi *little more than a shade or defect of light*, une faible lueur, suivie de l'orangé, du jaune et du vert, lesquels m'apparaissent comme une seule et même couleur, à saturation régulièrement décroissante. — Avec le vert", dit-il, „le *bleu* [2]) forme alors un contraste prononcé; en revanche, *le violet m'apparaît comme du bleu*, seulement foncé et plus saturé".

Il résulte de cette description, que Dalton ne voyait dans le spectre que deux couleurs, le *jaune* et le *bleu*, à différents degrés de saturation, et que ces couleurs se touchaient dans les teintes les plus pâles.

En ce peu de mots, l'anomalie qu'aujourd'hui on appelle habituellement cécité pour le *rouge* est caractérisée d'une manière exacte et complète.

Dalton ajoute que la flamme d'une bougie, vue à travers un

[1]) *Extraordinary facts relating to the vision of colours: with observations*, read Oct. 1794, dans: *Memoirs of the Liter. and Philos. Society of Manchester*, V, I, p. 28, 1798. — Reproduit dans: *Edinb. Journal of Sciences*, t. V, 1831, p. 88.

[2]) Dans le *Edinb. Journ. of Sciences* on trouve ici „*yellow*" au lieu de „*blue*".

prisme, donnait lieu aux mêmes apparences que la lumière du jour, sauf que l'extrémité rouge avait plus de vivacité.

Les comparaisons de toutes sortes d'étoffes et d'objets colorés, qu'il communique ensuite, forment, pour qui sait les interpréter, un commentaire presque achevé sur ses observations du spectre.

Dalton est moins heureux dans sa tentative d'explication de l'anomalie. Son hypothèse est: que les rayons rouges sont absorbés par les humeurs de l'œil. „Je regarde presque comme hors de doute", dit-il, „qu'un des milieux de mon œil est coloré, probablement l'humeur vitrée". Comment il était arrivé à cette idée, on peut le lire entre les lignes. Il avait remarqué que les couleurs changent à la lumière des bougies, et qu'alors il suffit d'un liquide bleu devant les yeux pour leur rendre le même aspect que dans le jour. Le phénomène se produisait, à ce qu'il avait appris, tout aussi bien chez les personnes à vue normale que chez les dyschromatopsiques. Et, d'après cela, il juge „très probable" que la lumière du soleil et la lumière d'une bougie ont originairement la même composition et ne diffèrent que parce que notre atmosphère est en réalité un fluide bleu. Eh bien: encore une seconde absorption de même nature dans les humeurs de l'œil, et la singulière anomalie est expliquée.

John Herschel combattit cette hypothèse [1]). La lettre [2]) qu'il adressa à Dalton, après que celui-ci eut répondu à quelques questions qu'il lui avait faites, est remarquable. Herschel pose en principe que tous les rayons du spectre ordinaire déterminent, aussi chez les dyschromatopsiques, la sensation de lumière: je présume qu'il était arrivé à cette conviction par l'étude d'un cas à spectre non raccourci [3]). Il ne saurait donc être question, dit-il, de l'absorption de certains rayons. Un défaut dans le

[1]) Il est très compréhensible que Brewster ait rattaché la cécité pour les couleurs à sa théorie de trois spectres superposés, produits par trois sortes de lumières, à l'une desquelles la rétine de Dalton aurait été insensible.

[2]) Publiée dans: *Memoirs of the life and scientific researches of* John Dalton, *by* W. Ch. Henry, London, 1844.

[3]) Voir son article *Light*, dans: *Metropolitan Encyclop.*, 1845, Art. 507, p. 434.

sensorium doit être la cause de l'anomalie. L'œil normal a trois sensations primaires: le rouge, le jaune et le bleu. Chez vous, elles sont réduites à deux, c'est-à-dire à une „*dichromic vision*". Lorsque ces deux sensations sont en équilibre, elles forment du blanc; leur négation constitue le noir, et leurs mélanges, en diverses proportions, sont vos tons composés. Du reste, nous ne connaissons pas plus vos deux couleurs primaires que vous ne connaissez nos trois. „Ce que j'ai en vue", — ainsi poursuit-il, donnant preuve d'une conception juste des énergies physiologiques, — „ce que j'ai en vue n'a absolument aucun rapport avec la théorie de la lumière ni avec la composition du spectre, qui ne touchent en rien le sujet, pas plus que la question concernant la saveur amère, douce ou salée ne trouve sa solution dans l'analyse chimique des matières dégustées" [1]).

Ce que Herschel avait reconnu et affirmé fut prouvé par Clerk Maxwell. Celui-ci, qui à l'aide d'une disposition meilleure des disques rotatifs s'était facilement convaincu que pour l'œil normal toutes les couleurs peuvent être formées au moyen de trois couleurs types, trouva que chez les daltoniens cela peut se faire au moyen de deux couleurs seulement, le jaune et le bleu, par exemple.

Plus tard, il obtint le même résultat en mélangeant des couleurs spectrales [2]). Maxwell formule plus nettement que Dalton la conclusion que les dyschromatopsiques distinguent seulement deux couleurs dans le spectre, couleurs qui, perdant graduellement de leur saturation, se rencontrent en une ligne incolore. Le vert *E* leur paraît un bon jaune, et le bleu *F* ⅔ *G* un bon bleu. Pour cette raison, il choisit ces deux couleurs comme couleurs types. Et par leur mélange en proportions déterminées, il compose

[1]) Dalton ne fut pas convaincu. Il persista dans le désir formel qu'après sa mort on fit l'examen de ses yeux, et Ramsome, son médecin, trouva l'humeur vitrée d'un jaune pâle et, placée devant l'œil, sans influence sur la couleur des objets rouges et verts. Voir Henry *l. c.* — Aujourd'hui, l'ophthalmoscope nous apprend déjà sur le vif que l'absorption n'est pas en jeu dans le phénomène: à la lumière rouge du spectre, il nous montre le fond de l'œil, chez les aveugles pour le rouge, dans la même couleur et la même intensité lumineuse que chez les personnes douées d'une vue normale.

[2]) *Philosophical Transactions* for 1860, t. CL. p. 78.

tous les tons du spectre [1]), ainsi que le blanc, tel que, dans la ligne incolore, il naît d'une lumière homogène.

Maxwell fait encore un pas de plus et cherche quelle sensation devrait être ajoutée, comme troisième couleur fondamentale, pour rendre l'œil dyschromatopsique semblable à l'œil normal. Mais, fidèle à mon plan de considérer les systèmes simples en dehors de toute relation avec le système normal, je ne touche pas ici à cette question. Il nous suffit de savoir que le système des daltoniens a été reconnu de nature dichromatique. S'ils donnent à leurs couleurs les noms de jaune et de bleu, cela ne prouve nullement qu'ils voient le jaune et le bleu de la même façon que nous, mais seulement que dans notre jaune et notre bleu leurs couleurs ressortent avec le plus de vigueur. Maxwell et Helmholtz (par suite sans doute de la supposition que chez les dyschromatopsiques il reste deux des couleurs fondamentales) jugent même peu probable que la sensation que ceux-ci appellent jaune ressemble à son homonyme chez nous. Et certainement rien n'autorise à admettre que les sensations qu'ils désignent sous les noms de jaune et de bleu soient les mêmes chez tous les dyschromatopsiques. Mais toujours elles sont des contrastes. Et comme celle des rayons moins réfrangibles est plus vive que celle des rayons plus réfrangibles, j'ai cru pouvoir les distinguer comme *chaude* et *froide*. Par l'introduction de ces noms, qui ne préjugent rien, l'indépendance du système est reconnue, et les dyschromatopsiques les trouvent suffisamment caractéristiques. Quant aux sensations qui y correspondent, c'est un point que nous examinerons plus tard.

Dans la ligne blanche incolore du spectre les deux couleurs en question trouvent leur équilibre. On peut donc l'appeler la

[1]) Selon Maxwell, il faudrait ajouter à E (vert jaunâtre) un peu de bleu pour former D, c'est-à-dire que D serait moins saturé que E. La lumière totale de D à A exigerait aussi une addition de bleu pour être $= E$. Je ne puis expliquer ce résultat, mais je ne l'en regarde pas moins comme inadmissible. La comparaison directe de D et E montre que E est moins saturé que D, et même en D, comme nous le verrons plus loin, le maximum de saturation n'est pas encore atteint.

ligne neutre, N. Tous les tons situés du côté moins réfrangible de cette ligne sont des tons chauds, tous ceux situés du côté plus réfrangible, des tons froids. Les tons chauds ne peuvent être distingués l'un de l'autre que par des différences de saturation et d'intensité lumineuse, et il en est de même des tons froids. Mais les tons froids et chauds forment des contrastes spécifiques et ne sont jamais confondus entre eux.

La situation de la ligne neutre a une grande importance. Maxwell l'a trouvée, dans un cas soumis à son examen, au voisinage de *F*, un peu vers le côté moins réfrangible. On verra tantôt que sa position varie légèrement pour des dyschromatopsiques différents. Mais toujours les tons situés au côté moins réfrangible sont les tons chauds, ceux au côté plus réfrangible les tons froids; d'où il suit que, entre certaines limites, la même couleur peut être froide pour un daltonien, chaude pour un autre.

Dans la description donnée par William Pole de sa propre anomalie [1]), le système dichromatique, ainsi que le fait remarquer Herschel [2]), avait déjà trouvé son illustration complète. S'attachant au cercle chromatique de Chevreul, M. Pole analyse ses sensations et indique ses *deux* teintes incolores ou neutres, l'une (celle du spectre) dans le vert (ou plutôt dans le vert bleuâtre), l'autre dans le pourpre complémentaire: dans chacune de ces teintes, ses deux couleurs fondamentales viennent se rencontrer, en perdant graduellement de leur saturation. Par là s'expliquent toutes les confusions énigmatiques qu'il décrit comme les symptômes de son anomalie. A la fin de son travail, — et ce n'en est certes pas la partie la moins intéressante, — M. Pole traite la question de savoir si son cas est le type général de la dyschromatopsie. Ici nous sommes initiés dans la vision des daltoniens, dans l'illusion qu'ils se font à eux-mêmes et dans ce qu'a de trompeur, aussi pour les autres, leur nomenclature d'emprunt:

[1]) *Proceedings of the Royal Society*, 1856, VIII, p. 172; et *Philosophical Transactions*, 1859, P. I, p. 323.

[2]) Voir le rapport sur le Mémoire de M. Pole, dans: *Proceedings*, 1859, X, p. 72.

nous reconnaissons ainsi la cause de tout ce que présentent d'inexact et de défectueux, d'incomplet et de discordant, les divers cas décrits, dans lesquels lui, Pole, comme dyschromatopsique, retrouve pourtant toujours une affinité avec son propre état [1].

C'est pour cela qu'il regarde son anomalie comme vraiment typique, et qu'il ne croit pas à tous les degrés et formes de la dyschromatopsie que certains auteurs, Wilson [2]) et Wartmann [3]), par exemple, ont distingués.

Tous les cas de dyschromatopsie appartiendraient-ils donc à une seule et même forme?

Dans son second Mémoire, M. Pole communique les résultats obtenus, à l'aide du disque rotatif, sur trois autres daltoniens. Chez tous il trouva le système purement dichromatique. Mais il constata, en même temps, que les coefficients des équations différaient beaucoup dans les divers cas. Dans tous, on avait, par exemple, rouge + bleu = blanc + noir; mais les quantités nécessaires de chacune de ces teintes étaient très inégales.

Or, vingt ans auparavant, Seebeck [4]) avait déjà distingué deux

---

[1]) Voici les paroles mêmes de Pole: „It is only after long and careful investigation I have come to the conclusion that my sensations of colour are limited to blue and yellow. But before I found this out, that is, for nearly thirty years of my life, I firmly believed, that what I now know to be only differences in tone of one or other of these, were different colours, and hence I was in the habit of talking of red, crimson, scarlet, green, brown, purple, pink, orange etc., not of course with the confidence of the normal eyed, but still with a full belief that I *saw* them. If therefore at that time any scientific man had examined me, I should have given him a description of my case, which I now, after more careful study, know would have been entirely wrong. I should have told him, among other incorrect statements, that I saw red objects of a full tone, such as vermillion, soldier's coats, etc., perfectly well; and I could, if necessary, have supported my assertion *by naming correctly a great variety of bodies having this colour*, which indeed I am in the habit of doing every day". Et ce qu'il dit ensuite est non moins juste et frappant.

[2]) *Researches on Colour-blindness*, Edinburgh, 1855.

[3]) *Mémoire sur le Daltonisme et la dyschromatopsie*, Genève, 1849.

[4]) *Ann. der Chemie und Physik*, 1837, t. XII, p. 177.

classes. De la nature même de la dyschromatopsie, Seebeck ne se fait pas une idée exacte. Ses descriptions non plus ne peuvent se mesurer avec celle de Dalton. Mais, mieux que les successeurs de celui-ci, il avait du moins compris que le seul moyen d'arriver à une appréciation juste de la vision des dyschromatopsiques est de leur faire comparer et assortir des couleurs, non de leur demander des noms. Et par ce moyen il avait reconnu, ce qui avait échappé à Dalton: qu'on peut distinguer deux classes de dyschromatopsiques. En effet, ce que les uns assortissaient comme égal, d'autres le rejetaient, et réciproquement. Seebeck remarqua, à cette occasion, qu'au même rouge ceux-ci associaient un vert clair, ceux-là un vert sombre. Ce fut pour lui une suggestion. A quelques-uns de ces dyschromatopsiques il demanda d'indiquer les limites du spectre, et il le trouva raccourci au côté rouge chez les derniers, non chez les premiers: donc, diminution de sensibilité pour les rayons peu réfrangibles chez ceux-là, non chez ceux-ci.

Là réside, comme il le dit lui-même, la cause unique, ou du moins essentielle, de la différence entre les deux classes. On se rappellera que Dalton voyait le rouge comme un défaut de lumière: il appartenait à la seconde classe de Seebeck. Les sujets de la première classe de Seebeck paraissent voir le rouge avec la même clarté que l'œil normal. Pour ceux-ci, la région la plus lumineuse du spectre est située là où elle l'est pour l'œil normal; pour ceux-là, elle s'est rapprochée du vert.

Effectivement, deux classes de cécité pour les couleurs se trouvent ainsi caractérisées.

En même temps que Maxwell, M. Helmholtz aussi avait entrepris l'examen de dyschromatopsiques et s'était assuré, par le disque rotatif et le spectre, que leur vision est dichromatique. De même que Maxwell, il supposa que la couleur qui fait défaut est une des couleurs fondamentales de l'œil normal. Admettant en outre, d'après l'un des cas étudiés par lui, que dans la seconde classe de Seebeck la couleur défaillante s'écarte peu du rouge spectral extrême, il proposa, le mot *daltonisme* ayant paru

irrévérencieux, de donner à cette anomalie le nom de *cécité pour le rouge*. Quant à savoir si, à ce même point de vue, les dyschromatopsiques de la première classe devraient être dits aveugles pour le vert, c'est une question que Helmholtz laissa indécise: des recherches ultérieures devaient la trancher.

Une fois prononcés par Helmholtz, ces noms furent bientôt généralement adoptés, et, par analogie, on parla aussi de cécité pour le violet ou le bleu, sans pouvoir indiquer encore de cas rentrant dans cette catégorie. Pour la commodité du langage, j'appellerai maintenant aussi les dyschromatopsiques de la première et de la seconde classe de Seebeck les *aveugles pour le vert* et les *aveugles pour le rouge*. Mais, par ces dénominations, je n'entends rien préjuger au sujet du rapport entre le système normal et les systèmes anormaux, rapport qui ne sera étudié que plus tard.

M. Preyer [1]), à son tour, nous donna des définitions nettes des trois formes admises. Celui qui confond le rouge avec le vert, et pour qui le spectre n'est raccourci ni au côté rouge ni au côté violet, est aveugle pour le vert (A v). Celui qui confond le rouge avec le vert et qui voit le spectre raccourci au côté rouge, est aveugle pour le rouge (A r). Celui qui confond le bleu et le vert, ou le bleu et le jaune, et qui voit le spectre raccourci au côté violet, est aveugle pour le bleu (violet) (A vi). L'auteur décrit exactement deux cas de cécité pour le vert, en s'attachant à déterminer aussi la situation de N, qu'il trouve la même dans les deux cas, à savoir, $\lambda = 0{,}5109\,\mu$. L'occasion de déterminer comparativement la situation de N chez les aveugles pour le rouge lui avait manqué.

Dans l'entre-temps, de divers côtés des voix s'étaient fait entendre pour réclamer, dans l'intérêt de la sécurité publique, un examen spécial du personnel des chemins de fer et des navires. M. George Wilson, en Ecosse, avait pris les devants en cette question (1853), M. A. Favre, en France, l'avait suivi (1871), et maintenant

[1]) Pflüger, *Archiv f. Physiol.*, 1868, t. I, p. 299 et suiv.

une impulsion vigoureuse lui fut imprimée en Suède, par M. Holmgren. Bien que fait uniquement à un point de vue pratique, l'examen susdit profita aussi à notre connaissance de la dyschromatopsie. A l'origine, le mode de procéder avait laissé, en général, beaucoup à désirer. M. Holmgren, s'inspirant de la théorie de Young, combina une méthode dont l'idée première était empruntée à Seebeck. Mais, tandis que celui-ci faisait trier librement un grand nombre de couleurs, M. Holmgren choisit certaines couleurs d'épreuve, sous la forme d'écheveaux de laine à tapisserie, auxquelles le sujet examiné devait assortir les teintes semblables. Quoiqu'il eût été guidé par l'idée de l'absence d'une des couleurs fondamentales, plutôt que par une conception nette du système dichromatique, M. Holmgren fut très heureux dans le choix de ses couleurs d'épreuve. Son vert pur blanchâtre s'applique avec succès tant aux aveugles pour le vert qu'à ceux pour le rouge, parce que pour les uns et les autres c'est un ton chaud et, de plus, l'un des tons chauds les plus faibles, de sorte qu'il doit être confondu avec le rouge, l'orangé, le vert jaunâtre, dans les tons pâles, ainsi qu'avec le gris jaunâtre. Dans son pourpre domine chez les aveugles pour le rouge la couleur froide, chez les aveugles pour le vert souvent la couleur chaude, et en conséquence les premiers y associent des tons violets et bleus pâles, les seconds des tons verts ou grisâtres assez foncés, plus ou moins chauds. Enfin, sa troisième couleur d'épreuve, le rouge écarlate clair, coïncide avec d'autres tons chauds: chez les aveugles pour le rouge, avec le vert foncé et avec le brun jaunâtre ou brun orangé foncé, chez les aveugles pour le vert, avec des tons beaucoup plus clairs de ces mêmes couleurs.

Dans le système d'examen adopté par M. Holmgren, à côté du vert pâle, choisi comme ton chaud, aurait convenu, comme ton froid, le violet pâle: tant les aveugles pour le rouge que ceux pour le vert y associent, indifféremment, le bleu pâle et le violet pâle. Le triage d'une dizaine d'écheveaux violets et bleus, de saturation différente, est une épreuve sensible pour découvrir la dyschromatopsie.

Les résultats obtenus avec le rose (pourpre pâle) et avec

l'écarlate suffirent à M. Holmgren pour distinguer les dyschromatopsiques en deux classes, correspondantes à celles de Seebeck.

Ces deux classes de viciés se caractérisent d'une manière frappante quand on leur fait copier les teintes du cercle chromatique. De même qu'avec des papiers sur le disque rotatif, ils peuvent, les uns et les autres, avec des matières colorantes composer, comme on sait, tous les tons possibles en n'employant, outre le blanc et le noir, qu'une couleur chaude intense et une couleur froide intense. Ces éléments leur suffisent donc aussi pour obtenir toutes les teintes du cercle chromatique. Un aveugle pour le vert et un aveugle pour le rouge (M. Escher, ingénieur, et M. van der Weyde, candidat en médecine) voulurent bien préparer de cette façon, en ne faisant usage que du jaune de Naples et du bleu de cobalt, les bandes nécessaires pour former une seconde et une troisième couronne à l'intérieur de mon cercle polychrome. Chacun d'eux était très satisfait de sa propre imitation, mais, quant à celle de l'autre, — pas le moins du monde. Et en effet, pour l'œil normal, les deux cercles intérieurs diffèrent beaucoup. Dans tous les trois, le jaune le plus clair et le bleu le plus clair se correspondent parfaitement. Mais, à partir du jaune, l'aveugle pour le rouge obtient beaucoup plus vite des tons obscurs en allant du côté du rouge, et l'aveugle pour le vert, au contraire, en allant du côté du vert; et en partant du bleu, c'est pour tous les deux l'opposé. On reconnaît nettement, en outre, que les deux lignes neutres correspondent chez l'aveugle pour le rouge et chez l'aveugle pour le vert à des teintes différentes, et que la ligne neutre de l'aveugle pour le rouge, qui correspond au rouge pourpre, est la teinte la plus foncée de toutes.

Si maintenant on met en présence de ces cercles un dyschromatopsique, les cercles intérieurs, qui n'ont que deux teintes (dans des degrés différents d'intensité et de saturation) lui paraissent tout aussi diaprés que le cercle extérieur, composé de cent teintes distinctes. Et si on lui demande lequel des cercles intérieurs s'accorde le mieux, quant à l'intensité lumineuse de toutes les bandes correspondantes, avec le cercle extérieur, sa réponse est, presque sans exception, décisive.

M. Holmgren [1]) a encore fait usage d'une méthode photométrique pour s'assurer que ses aveugles pour le rouge percevaient la lumière rouge, et ses aveugles pour le vert la lumière verte, avec une intensité amoindrie. Sa méthode par le chromatoskiomètre consistait à projeter deux lumières différentes, provenant de la même flamme, sur un même écran, l'une directement, à travers un verre coloré, l'autre indirectement, par réflexion sur un miroir. Ce miroir était mobile, et l'on faisait varier sa distance jusqu'à ce que les deux ombres d'une petite tige, placée devant l'écran, fussent également prononcées. De cette distance on déduisait l'intensité lumineuse à laquelle était égale celle de la lumière colorée, et des expériences comparatives sur l'œil normal apprirent que celle de la lumière rouge était réduite en moyenne à 0,42 chez les aveugles pour le rouge, et que celle de la lumière verte ne dépassait pas 0,64 chez les aveugles pour le vert.

L'emploi de la lumière du jour rend l'application de cette méthode encore plus simple. Dans la clinique du professeur Becker, à Heidelberg, j'ai vu une disposition pour l'examen des dyschromatopsiques par la méthode des ombres colorées, recommandée par M. Stilling. Elle consistait en deux ouvertures pratiquées l'une à côté de l'autre au volet de la fenêtre, l'une plus grande, pouvant recevoir des verres colorés, l'autre plus petite, de dimension variable, pourvue d'un verre dépoli. Sur un écran éclairé par les deux ouvertures, les ombres apparaissent à l'œil normal dans un contraste de couleur fortement accusé. Pour les dyschromatopsiques, le contraste est d'autant plus prononcé que la lumière colorée, employée à côté de la lumière blanche, est plus froide ou plus chaude; ils ne perçoivent deux ombres incolores que quand on se sert d'une de leurs teintes neutres, le vert bleuâtre ou le rose. Evidemment, la méthode n'est donc pas d'une application générale au diagnostic de la dyschromatopsie. Mais il n'y avait qu'à modifier légèrement la disposition de M. Becker et à munir d'une échelle la petite ouverture à verre dépoli, pour obtenir une méthode photométrique différentielle d'un usage très utile et commode. Une seule

[1]) *Centralblatt f. praktische Augenheilkunde*, 1878, p. 213.

épreuve avec un verre rouge suffit à reconnaître les aveugles pour le rouge et à les distinguer des aveugles pour le vert [1]).

Dans l'entre-temps, M. Hering avait présenté une nouvelle théorie du sens des couleurs. Il rejette, comme on sait, les variables de Young et met à leur place trois paires de sensations: blanc et noir, rouge et vert, bleu et jaune, correspondant à l'assimilation et à la dissimilation dans trois substances, la noire-blanche, la rouge-verte et la bleue-jaune. Le rouge et le vert, de même que le bleu et le jaune, ne sont pas des couleurs complémentaires, mais des couleurs antagonistes: ils ne se fusionnent pas pour former du blanc, ils se détruisent réciproquement. — Nous n'avons pas à développer ici cette théorie, ni à la combattre [2]). Il faut seulement remarquer qu'elle n'est pas restée sans influence sur les idées concernant la dyschromatopsie. Dans ce sens, M. Hering lui-même avait donné l'impulsion. „Ce qu'on appelle maintenant un aveugle pour le rouge", dit-il, „est plutôt un aveugle pour le rouge et le vert, en d'autres „termes, il lui manque la substance rouge-verte. Par suite, il „voit *incolore* ce qui à d'autres apparaît dans une des deux „couleurs principales rouge ou verte". C'est là, nous le savons, une erreur. Pour les dyschromatopsiques, le rouge simple et le vert simple ne sont pas incolores, mais vus tous les deux dans *la même couleur chaude*. Ils sont, comme nous l'avons constaté, confondus entre eux et avec toutes les autres couleurs chaudes, parce qu'ils se trouvent du même côté de la ligne neutre, — et il en est de même des couleurs allant du bleu verdâtre au violet inclusivement, lesquelles sont situées à l'autre côté de cette ligne. Si on conclut que les dyschromatopsiques ne voient ni le rouge ni le vert, parce qu'ils les confondent l'un avec

[1]) Nos recherches sur la couleur et l'intensité des ombres seront communiquées plus tard.

[2]) Mes objections principales sont mentionnées dans: *Congres périodique international des sciences médicales*, 6e session, sept. 1879. Amsterdam 1880, p. 601. Voir aussi: *Ann. d'Oculistique*, t. I, XXXIV, 1881.

l'autre, on doit conclure, pour la même raison, qu'ils ne voient ni le bleu ni le violet. Pourtant il y avait évidemment quelque chose de séduisant dans cette „substance rouge-verte" qui ferait défaut, et, à l'exemple de M. Hering, beaucoup d'ophthalmologistes commencèrent à parler de cécité pour le rouge-vert. La distinction jusqu'alors admise entre la cécité pour le rouge et la cécité pour le vert semblait par là s'évanouir. Mais, au fond, il n'en était pas ainsi. Car quiconque avait examiné des dyschromatopsiques savait très bien que chez une partie d'entre eux la sensibilité aux rayons peu réfrangibles était restée la même, que chez une autre partie elle était considérablement affaiblie, et que, si l'on voulait parler de cécité pour le rouge-vert, il fallait ajouter — avec spectre raccourci ou avec spectre non raccourci. Et c'est ce qu'on faisait réellement, sans se douter que par cela seul on reniait déjà la théorie de M. Hering.

M. Stilling introduisit, comme méthode d'examen, l'emploi des „tables pseudo-isochromatiques". Les chiffres, lettres ou figures, composés de petits carrés rouges, sur un fond de carrés jaunes ou brunâtres, n'étaient distingués ni par les aveugles pour le rouge, ni par les aveugles pour le vert. N'était-ce pas là une preuve que les uns et les autres appartenaient à une seule et même classe? Quelques-uns s'y sont mépris, en effet Mais M. Stilling savait très bien qu'il n'en était pas ainsi. Il avait dit expressément [1]): pour que, en cas de sensibilité amoindrie (ou normale) au rouge (c'est-à-dire, aux rayons peu réfrangibles), les figures restent méconnaissables, le fond doit présenter alternativement des tons clairs et obscurs d'une même couleur; et parfois, en outre, il avait donné aux petits carrés rouges eux-mêmes deux tons différents. Quoi qu'il en soit, et cela nous suffit, M. Stilling et autres partisans de la théorie de M. Hering font une distinction entre aveugles pour le rouge-vert et aveugles pour le rouge-vert, — tout comme on avait fait jusqu'ici entre aveugles pour le rouge et aveugles pour le vert.

Dans ses *Grundzüge einer Theorie des Farbensinnes*, M. Hering

[1]) *Die Prüfung des Farbensinnes beim Eisenbahn- und Marine-Personal*, 4°. Cassel, 1877, p. 6—7.

avait écrit (p. 137): „Les contradictions dans lesquelles on tombe, dès qu'on veut expliquer la dyschromatopsie par la théorie de Young, me paraissent se résoudre aisément dans ma théorie, comme je me propose de le montrer plus tard". Six ans après [1]), alors qu'il a lui-même examiné quelques dyschromatopsiques, il recule devant l'explication annoncée et se contente „de faire voir qu'à un dyschromatopsique qui n'a pas la sensation du vert manque aussi celle du rouge, et réciproquement, comme l'exige la théorie des couleurs antagonistes". Mais, cela même, il ne le prouve pas. Tout ce qu'il prouve, c'est que pour les dyschromatopsiques ordinaires le vert et le rouge sont une seule et même sensation, — que ce soit d'ailleurs celle du rouge, du vert, ou une autre. Or, cette identité n'est pas seulement exigée par la „théorie des couleurs antagonistes", mais appartient nécessairement à tout système dichromatique, dans lequel le rouge et le vert se trouvent au même côté de la ligne neutre. Voilà ce qui a été dit et démontré maintes fois, mais pas encore assez souvent. Toujours le même argument se fait jour, que les dyschromatopsiques ne voient ni le rouge ni le vert, et que par conséquent deux couleurs leur manquent. Autant vaudrait prétendre, — qu'il me soit permis de le répéter, — que les dyschromatopsiques ne voient ni le bleu ni le violet (puisqu'ils les confondent), et que par conséquent ces deux couleurs-là leur font également défaut. Néanmoins, l'argument ci-dessus rappelé est la vraie pierre d'achoppement. Après M. William Pole, elle a ébranlé beaucoup de convictions, et la théorie de M. Hering, si elle y est étrangère par son origine, lui doit son succès.

Et maintenant l'explication de la dyschromatopsie par la „théorie des couleurs antagonistes"! Ici se dressent devant son auteur des obstacles insurmontables. La différence entre la cécité pour le rouge et la cécité pour le vert, ou, ce qui revient au même, entre la cécité pour le rouge-vert avec et sans spectre raccourci, ne saurait

[1]) Hering, *Zur Erklärung der Farbenblindheit aus der Theorie der Gegenfarben*, 1880.

se concilier avec elle. Dernièrement, MM. von Kries et Küster [1]) ont encore une fois mis ce désaccord en pleine lumière, et M. Hering n'a rien répondu. Et en effet, comment expliquer que chez les aveugles pour le rouge les rayons peu réfrangibles excitent tout aussi peu la sensation du blanc que celle du rouge, bien que, comme le montre clairement l'action de la totalité des rayons, la substance noire-blanche ne manque certainement pas chez eux? M. Hering essaie pourtant d'en rendre compte en risquant la remarque que dans le rouge spectral „la valence blanche est déjà faible même pour l'œil capable de discerner les couleurs", sans songer que par cet aveu les couleurs „antagonistes" sont mises en grand danger. Mais, comprenant bien que cela ne suffit pas à écarter l'objection, il finit par se réserver „d'exposer plus tard en détail ce qui a rapport au spectre spécial incolore (à la substance blanche-noire) des dyschromatopsiques. „Ici", dit-il, „j'ai seulement voulu montrer que tout aveugle pour le rouge est „aussi aveugle pour le vert, et vice-versâ": ce que cela signifie, on l'a déjà vu. Du reste, sachons attendre ce qu'effectuera la sagacité bien reconnue de M. Hering.

Je crois en avoir dit assez pour motiver la distinction entre la cécité pour le rouge et la cécité pour le vert. Il s'agit seulement de savoir si elles forment des types tellement indépendants, que tous les aveugles pour le rouge, et de même tous les aveugles pour le vert, concordent entre eux et que, des uns aux autres, il n'y ait aucune forme de passage. L'examen comparatif des couleurs spectrales donnera peut-être la réponse à cette question. C'est de cet examen que nous allons maintenant nous occuper.

L'instrument dont je me suis servi est un spectroscope double [2]),

---

[1]) *Arch. f. Anat. u. Physiologie*, 1879, p. 513.

[2]) J'ai reçu cet instrument, en octobre 1878, de MM. Schmidt et Haensch (de Berlin), par l'obligeante entremise de M. Küster, à qui j'avais demandé où l'on construisait en Allemagne des spectroscopes doubles. Le modèle

semblable à celui de Vierordt, mais pourvu de deux tubes col-

Fig. 1.



limateurs (fig. 1, A et B) faisant entre eux, avec un peu de jeu, un angle de 104°. Grâce à ces deux tubes, dirigés sur le même prisme, celui-ci peut former deux spectres, que nous appellerons **a** et **b**, tous les deux visibles dans le tube oculaire, l'un ayant son extrémité rouge tournée à gauche, l'autre à droite. On peut d'ailleurs régler les fentes de telle sorte que les spectres se recouvrent en tout ou en partie, ou soient entièrement séparés. Le tube A est fixé à la pièce centrale M, dans laquelle se trouve le prisme. B peut tourner, à l'aide de la vis *s*, autour de l'axe de cette pièce centrale, de manière que la lumière tombe sous un angle variable sur le prisme et que le spectre **b** se meuve devant le spectre fixe **a**. La coulisse de Vierordt, D, met en mouvement un diaphragme, par lequel on peut isoler une bande plus ou moins large des spectres. Quand on manœuvre la vis *s*, toutes les couleurs de

présenté par M. Hirschberg, en janvier 1879, à la Société physiologique, avait été construit par M. Dörffel, de Berlin. Voir *Central-Blatt für praktische Augenheilkunde*, 1879, III, p. 55.

b viennent passer successivement au-dessus de la couleur fixe de a, ce qui permet de comparer les couleurs entre elles et aussi, en cas de recouvrement partiel, de les voir en même temps que la couleur résultante. La largeur des fentes des tubes-collimateurs se règle au moyen des vis s' et s''.

On commença par déterminer pour a, en employant la lumière solaire, la position des raies de Frauenhofer et celle de quelques raies métalliques sur l'échelle x de la coulisse, allant de de 0 à 50, afin d'en déduire (à l'aide d'une courbe) les longueurs d'onde correspondant à ces numéros. Partant alors de longueurs d'onde déterminées de a, on traduisit, de la même manière, les indications de la vis s en longueurs d'onde correspondantes de b.

Devant chacun des tubes-collimateurs peut être placée une lumière artificielle. Lorsqu'on veut faire usage de la lumière du jour, on l'emprunte à un grand carreau de verre dépoli, disposé devant une fenêtre, en face d'un ciel assez uniformément éclairé, à l'opposite du soleil, et on a soin que les tubes soient dirigés sous le même angle sur ce carreau. Au moyen d'un appareil à miroir, la lumière destinée aux deux tubes peut aussi être dérivée d'un même point du ciel.

L'instrument peut servir à des fins très variées [1]): à passer

---

[1]) Les indications exigent différentes corrections:

1°. Les fentes de A et de B n'ont qu'un seul de leurs bords mobile, d'où il suit que le spectre se déplace quand on les élargit ou rétrécit.

2°. Pour la même raison, toute modification apportée à la fente de l'oculaire fait varier la longueur d'onde moyenne de la lumière observée.

3°. La position de B, par rapport à A, demande à être fréquemment contrôlée et, au besoin, corrigée.

L'instrument a, en outre, ses défauts:

1°. L'extrémité violette du spectre fixe a ne se voit que dans une direction très oblique, ce qui diminue l'exactitude de l'observation.

2°. Le spectre b n'est pas vu sous la déviation minimum, et il en résulte que les raies de Frauenhofer de a et de b ne sont pas nettes simultanément. On peut toutefois, en faisant convenablement rentrer l'oculaire, voir les unes et les autres à l'état nébuleux et déterminer leur position relative en a et en b.

3°. Beaucoup de combinaisons ne se recouvrent pas d'une manière satis-

le spectre en revue et à étudier séparément chacune de ses parties (fente oculaire); à déterminer ses limites, ainsi que la situation de la ligne neutre N; à déterminer les intensités lumineuses relatives et le lieu du maximum; à comparer les couleurs et la saturation relative de deux tons de la même couleur; à mélanger deux couleurs spectrales, le mélange et ses éléments étant vus simultanément; à déterminer les couleurs complémentaires et les proportions nécessaires pour former du blanc, etc.

Quand il y a présomption de dyschromatopsie, on commence par *comparer les tons de la couleur chaude* C, depuis *D* jusqu'au rouge extrême.

Dans la moitié supérieure de la fente oculaire on amène *D* de **a**, dans la moitié inférieure *D* de **b**, en leur donnant des intensités lumineuses égales.

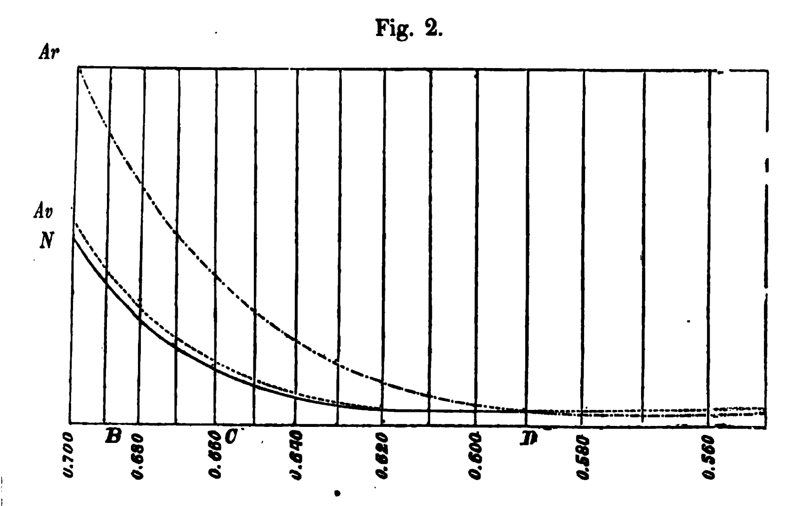
On tourne ensuite B du côté du rouge: pour l'œil normal, **b** devient alors plus rougeâtre; l'œil dyschromatopsique voit seulement **b** s'obscurcir, et si l'on rend de nouveau égale l'intensité lumineuse de **a** et de **b**, les couleurs lui paraissent identiques. Cette opération peut être répétée un certain nombre de fois. Il arrive, dans quelques cas, que le dyschromatopsique parle alors aussi de rouge quand la couleur devient plus obscure, et même, finalement, à intensité lumineuse égale. Cela ne prouve pas, nous le montrerons plus loin, qu'il voie réellement du rouge: généralement ce n'est qu'un degré un peu plus élevé de saturation. Dans cet examen, la lecture des longueurs d'onde de **b** se fait chaque fois sur *s''*, celle des largeurs de la fente sur *s*.

La fig. 2 a pour abscisse le côté rouge du spectre, pour ordonnées les largeurs de la fente de B auxquelles on obtient les mêmes intensités lumineuses. Les courbes Ar et Av sont respectivement celles d'un aveugle pour le rouge et d'un aveugle

---

faisante dans la fente, ou exigent pour cela que l'œil occupe une position déterminée devant l'oculaire, ce qui change aussi l'intensité lumineuse. Cette circonstance rend l'observation incertaine surtout pour ceux qui n'y sont pas suffisamment exercés.

Fig. 2.



pour le vert. Elles caractérisent ces deux états. La troisième courbe, N, est d'un œil normal. Elle coïncide à peu près avec celle de l'aveugle pour le vert.

La comparaison peut être continuée jusqu'en E: on reconnaît alors que chez l'aveugle pour le vert le maximum de l'intensité lumineuse se trouve environ en D, chez l'aveugle pour le rouge environ en E. — Au côté violet du spectre, les courbes de Av et de Ar, obtenues de la même manière, sont à peu près de la même forme (mais non de la même intensité lumineuse).

Après cette première épreuve, on passe à la *détermination de la ligne neutre* N. Cette ligne correspond à la longueur d'onde qui excite les deux énergies C et F dans le même rapport que le fait la lumière solaire totale, au point, par conséquent, où pour les deux courbes les éléments des deux énergies sont proportionnels aux énergies elles-mêmes:

$$\frac{d\,\mathrm{C}}{\mathrm{C}} = \frac{d\,\mathrm{F}}{\mathrm{F}}.$$

Sa situation est donc indépendante des valeurs relatives de F et de C. Chez les aveugles pour le rouge et les aveugles pour le vert elle a toujours été trouvée entre b et F. A l'aspect du spectre le dyschromatopsique reconnaît le contraste de couleur entre les deux extrémités et, au milieu, la zone pâle qui forme le passage. En faisant

ici mouvoir à droite et à gauche l'étroite fente oculaire, il trouve promptement la ligne incolore. A une lumière vive, la fente n'est parfaitement incolore qu'en son milieu, un peu chaude à l'un de ses bords, un peu froide à l'autre: elle se trouve alors rigoureusement au point. Chez un Ar typique, N correspondait à $\lambda = 0{,}4948\,\mu$, chez les Av toujours à une longueur d'onde plus grande, en moyenne à $\lambda = 0{,}5023$. Le N des Ar est ordinairement appelé froid par les Av, le N des Av ordinairement chaud par les Ar. — A une lumière faible, la raie incolore s'élargit beaucoup et on la place trop près de *b*, parce que la couleur chaude devient alors moins vite visible que la couleur froide. De là résulte une erreur constante. En outre, l'erreur probable, qui est très faible à une lumière vive, s'amplifie alors beaucoup.

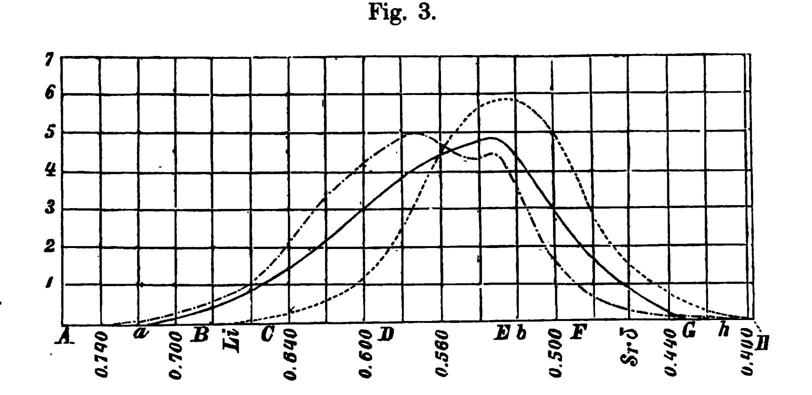
Pour les *limites du spectre*, il vaut mieux les déterminer sur **b** que sur **a**. En **a** le violet a une situation si excentrique que l'œil peut difficilement suivre la fente jusque-là. On fermera donc la fente de A, on donnera à la fente oculaire une position fixe, à peu près dans l'axe du tube (correspondant à *D* ou *E* de **a**), et on fera mouvoir **b** devant cette fente. Une détermination absolue n'est pas possible avec le spectroscope. A un éclairement intense la lumière diffuse s'étend plus loin que le spectre, et à un éclairement faible la lumière colorée n'atteint pas les vraies limites. Mais la détermination des limites relatives, qui a aussi sa valeur, n'offre aucune difficulté. On n'a qu'à chercher, avec la même lumière, les limites pour le dyschromatopsique et pour soi-même. J'ai trouvé ainsi qu'à la limite rouge le spectre est raccourci pour les Ar, tandis que pour les Av il a la même étendue que pour moi. La différence entre Ar et Av ne s'élevait ordinairement pas à moins de $0{,}04\,\mu$. Une pareille différence est parfaitement caractéristique pour les Ar. Tous les aveugles pour le vert voient facilement *Ka* α ($\lambda = 0{,}762$) et *A* ($\lambda = 0{,}761$), à la lumière solaire directe. Les aveugles pour le rouge ne les voyaient pas, mais seulement, à la lumière solaire directe et comme limite extrême, *a* ($\lambda = 0{,}7185$).

Au côté violet, les Ar et les Av voient le violet et, dans des

conditions favorables, aussi l'ultra-violet. Sous ce rapport je leur cédais à tous, probablement à cause de la couleur jaune qui est propre au cristallin des gens un peu avancés en âge. Pour voir *HH*, il me faut la lumière solaire directe.

On peut déterminer aussi *l'intensité lumineuse relative sur toute l'étendue du spectre.* Ayant mis **a** et **b** sur des couleurs égales, par exemple sur la raie *C*, avec des intensités lumineuses égales, on tourne le tube B jusqu'à ce qu'une différence devienne perceptible, on fait la lecture de la fente de B, après avoir rétabli l'égalité, puis on recommence la même opération. Aussitôt que la différence de couleur rend trop difficile le jugement sur l'intensité lumineuse, on transporte **a** sur la couleur atteinte par **b**, par exemple de *C* sur *B*, plus tard, à l'autre côté, de *D* sur *E*, et on procède de la même manière qu'on l'avait fait en partant de *C*. Les dyschromatopsiques, pour lesquels à partir de N il n'y a de chaque côté que des différences de ton, non de couleur, jugent mieux de l'égalité d'intensité lumineuse et par suite n'ont pas besoin de transporter aussi souvent. Pour les yeux normaux, la méthode n'est certainement pas parfaite, mais je ne crois pas qu'il y en ait de meilleures. Ce qui prouve en sa faveur, c'est l'accord des résultats obtenus dans des épreuves répétées, et aussi pour des vues normales différentes. M. van der Weyde, lui-même aveugle pour le rouge, a construit, au moyen des déterminations faites sur lui-même, sur un aveugle pour le vert et sur une vue normale, les courbes des intensités, celles-ci regardées comme inversement proportionnelles aux largeurs de la fente; il les a ensuite réduites pour le spectre d'interférence et, attendu que la sensibilité à la lumière du jour avait été trouvée la même pour les trois vues, à des intégrales égales. La fig. 3 donne un schéma de ces courbes: tant pour la vue normale (ligne continue) que pour les aveugles pour le rouge (ligne pointillée), le maximum se trouve ici en *E*; dans le spectre dioptrique, cela n'a lieu que pour les Ar. De la même manière ont été obtenues les courbes relatives à la lumière artificielle et aux minima de lumière perceptibles (également

Fig. 3.



déterminés avec le spectroscope double), ainsi que le fera connaître M. van der Weyde, dans sa thèse de doctorat.

En allant de N vers les extrémités du spectre, C et F croissent respectivement en *saturation*, jusqu'à ce que le maximum ait été atteint: celui de C, pour Ar, environ en *C*, pour Av, en $C \frac{1}{2} D$; celui de F, pour tous les deux, environ en *G*. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à pointer, à la fois de **a** et de **b**, un même ton chaud ou froid, et à tourner B jusqu'à ce qu'une différence devienne visible et reste visible après que les intensités lumineuses ont été rendues égales. Au-delà des limites assignées, la comparaison ne donne plus que des indications incertaines. MM. von Kries et Küster ont également trouvé une saturation croissant régulièrement, à partir de la ligne neutre, vers les deux extrémités du spectre.

On peut encore déterminer, approximativement, *quelle grandeur doit avoir la différence de longueur d'onde*, *pour que l'œil saisisse une différence*: l'expérience a appris que près de N l'œil dyschromatopsique (l'œil aveugle pour le rouge aussi près de *B*) est à cet égard plus sensible que l'œil normal, partout ailleurs, moins sensible.

Détermination quantitative de la saturation. On peut amener successivement la superposition entre un même ton froid et tous les tons chauds, ou entre un même ton chaud et tous les tons froids,

et régler les largeurs des fentes de telle sorte que le mélange forme du blanc. Si l'on connaît en outre les intensités lumineuses relatives (voir fig. 3), il est possible de calculer pour tous les tons les degrés de saturation relative. Avec le spectroscope double les résultats ne furent toutefois pas satisfaisants, ce qui tenait évidemment à ce que la superposition et la coïncidence étaient trop imparfaites. Je m'abstiens, en conséquence, de donner les courbes des deux énergies, qui ont été déduites de ces résultats. — La seule méthode sûre est de former chaque ton du spectre par la combinaison d'un ton chaud et d'un ton froid (de deux autres spectres), dont on puisse régler les intensités lumineuses: chaque observation donne alors, pour une longueur d'onde déterminée, les ordonnées de C et de F. J'ai imaginé une disposition qui permet d'atteindre ce but; j'y reviendrai plus tard.

En attendant, les résultats obtenus suffisent déjà pour décider jusqu'à quel point tous les aveugles pour le rouge, et de même tous les aveugles pour le vert, peuvent être réputés égaux entre eux et si, entre les deux types, les formes de passage manquent absolument.

Pour cela, je puis m'appuyer en premier lieu sur les courbes des tons chauds extrêmes (voir fig. 2) d'une dizaine de cas bien étudiés. Ceux-ci, en effet, forment manifestement deux groupes. Les courbes des aveugles pour le vert s'écartent très peu l'une de l'autre, guère plus que celles des sujets à vue normale, auxquels, en réalité, ils doivent être assimilés. Et encore, pour une bonne part, les différences trouvées sont certainement imputables à des erreurs d'observation; car, dans l'examen comparatif, les intensités lumineuses d'un des aveugles pour le vert convenaient ordinairement aussi aux autres. Plus de la moitié des dyschromatopsiques appartiennent à ce type passablement fixe.

Quant aux courbes des aveugles pour le rouge, la plupart se rapprochent aussi assez étroitement de celle de notre Ar typique (fig. 2). L'examen comparatif, toutefois, accusa ici des

différences beaucoup plus grandes [1]). Entre les aveugles pour le vert et les aveugles pour le rouge il n'y pas non plus absence totale de formes intermédiaires, lesquelles, vu la conformité des aveugles pour le vert, doivent être rapportées aux aveugles pour le rouge [2]).

En second lieu, la différence des deux types se manifeste aussi, comme nous l'avons déjà vu précédemment, dans le cours ultérieur de la courbe des intensités lumineuses, laquelle ne continue à s'élever de *D* en *E* que chez les aveugles pour le rouge (voir fig. 2), ainsi que dans la situation du maximum de l'intensité lumineuse et de la ligne neutre N.

Pour tout ce qui est du domaine de la pratique, nous pouvons donc certainement maintenir la distinction entre les aveugles pour le rouge et les aveugles pour le vert. Si les premiers diffèrent beaucoup entre eux, ils n'en forment pas moins un groupe défini, bien circonscrit.

Mais s'il s'agit du rapport entre le système normal et les systèmes dichromatiques, les différences en question acquièrent une importance essentielle.

Nous allons nous en occuper, sous ce point de vue, dans le chapitre suivant.

III. Rapport entre le système normal et les systèmes anormaux.

Il résulte de ce qui précède, que le système normal est tri-

[1]) MM. von Kries et Küster ont établi des équations entre le vert bleuâtre ($\lambda = 0{,}5015\ \mu$), près de la ligne neutre, et des mélanges de *C* et de *E* ½ *G*. Elles montrent que, chez leurs aveugles pour le rouge, l'intensité lumineuse de *C* était très faible et, en outre, très diverse. Chez les aveugles pour le vert, leurs équations entre les couleurs ci-dessus nommées présentent des discordances moindres, mais pourtant encore fortes.

[2]) M. Stilling, à en juger pas ses dernières „tables pseudo-isochromatiques" (1880), a trouvé de très grandes différences chez les aveugles pour le rouge. Une réduction extraordinaire du spectre (jusqu'à $\lambda = 0{,}633$) a été décrite par M. Hochecker (*Archiv f. Ophthalm.*, t. XIX), comme observée sur lui-même.

chromatique et que les systèmes anormaux sont dichromatiques.

Nous avons maintenant à rechercher quel rapport il peut exister entre ces deux espèces de systèmes.

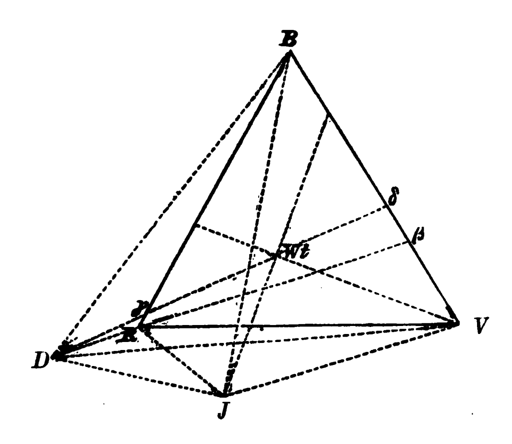
Y aurait-il, dans les systèmes à deux couleurs des dyschromatopsiques, simplement absence d'une des trois énergies qui sont propres au système normal? En d'autres termes, chaque système dichromatique serait-il composé de deux des énergies du système trichromatique?

C'est là ce qu'ont supposé Clerk Maxwell et Helmholtz, et — c'est là ce qu'ils ont cru trouver.

Rappelons succinctement comment Maxwell (1857 *l. c.*) a procédé.

Aux trois sommets du triangle de la table chromatique il place trois couleurs, qui ensemble forment du blanc: le bleu B, le rouge R et le vert V (fig. 4). Par des équations sur le disque rotatif il trouve, suivant la construction du centre de

Fig. 4.



gravité, la position de chaque teinte. C'est ainsi qu'ont été

obtenus le blanc Wt et le jaune J. L'œil normal a besoin de trois couleurs (outre le blanc et le noir D) pour former tous les tons. Deux couleurs suffisent à l'œil dyschromatopsique: au moyen du vert et du bleu se laissait former du rouge. Le disque rotatif donna:

$$19\,V + 5\,B + 76\,D = 100\,R.$$

Cela signifie que 24 (19 + 5) de vert bleuâtre sont égaux à 100 de rouge. Sur la table chromatique, ce vert bleuâtre se trouve au point β, qui partage la ligne BV dans la raison de 19 : 5. Le long de la droite βR, tous les passages ont la même couleur, parce que R = β; mais en R cette couleur est plus foncée, et en D (attendu qu'on a $RD : R\beta = 24 : 100—24$) elle devient = 0. Avec D est donc trouvé le point noir du dyschromatopsique: la couleur qu'il ne voit pas, — qui manque à son système.

Cette couleur est-elle une des couleurs fondamentales de l'œil normal? Pour juger ce point, Maxwell cherche si l'addition de la couleur en question rendrait le système égal au système normal. A cet effet, il examine sur le disque rotatif des équations que la table chromatique suggère et dans lesquelles D joue un rôle. La ligne D Wt représente tous les passages du noir au blanc (sépare donc sur la table les tons froids, situés au-dessus, des tons chauds, situés au-dessous): les points γ et δ, où elle coupe les lignes BR et BV, et qui pour l'œil normal sont de teinte carmin et vert bleuâtre, doivent donc être incolores. Effectivement, mesurées et examinées sur le disque rotatif, ces deux teintes furent trouvées peu différentes du gris par deux dyschromatopsiques.

Pour le point d'intersection des lignes DV et RJ, la mesure et l'observation par ces deux mêmes dyschromatopsiques donnèrent aussi des résultats passablement concordants.

En outre, nous voyons BJ couper toutes les droites menées de D à l'une quelconque des couleurs, — ce qui indique que toutes les couleurs peuvent être formées avec du jaune et du bleu; or, en ces différents points d'intersection, il n'y eut

pas non plus d'écart notable entre les équations calculées et observées.

A raison de ces résultats, Maxwell conclut que l'hypothèse du défaut d'une des trois énergies, qu'elle soit conforme à la réalité ou non, fournit un fondement solide à une théorie de la cécité pour les couleurs, parce qu'elle est l'expression des faits observés.

A part même l'objection [1]) que les trois couleurs fondamentales ont été supposées d'intensité égale, tout ce que nous apprennent ces résultats, c'est, à mon avis, qu'aux deux énergies existantes il peut en être ajouté une troisième, par laquelle le système *se rapprocherait* du système normal. Or, cela est possible, on le conçoit aisément, même si les deux énergies restantes diffèrent assez notablement de celles du système ordinaire.

Plus tard (1860 *l. c.*), lorsque Maxwell étudia le système normal à l'aide des couleurs du spectre, il appliqua également cette méthode à un dyschromatopsique.

Pour le dyschromatopsique, on avait:

$$33{,}7\ V + 33{,}1\ B = Bl;$$

pour Maxwell lui-même:

$$22{,}6\ R + 26\ V + 37{,}4\ B = Bl.$$

„Si nous supposons", dit Maxwell, „que la lumière reçue par „l'organe de la vision était la même dans les deux cas, nous „pouvons combiner ces équations par voie de soustraction, ce „qui donne:

$$22{,}6\ R - 7{,}7\ V + 4{,}3\ B = D".$$

Et D serait alors la couleur fondamentale manquante.

De quel droit on opère et on conclut ainsi, je n'ai pas réussi à le comprendre. En tout cas, la différence en question, si elle représente quelque chose, indiquerait seulement ce qui doit être

---

[1]) Voir Aubert, *Physiologie der Netzhaut*, 1865, p. 173, et Bruecke, *Die Physiologie der Farben*, 1866, p. 62.

ajouté au système pour qu'il se rapproche autant que possible du système normal.

Mais Maxwell a fait plus. Il a aussi composé toutes les couleurs au moyen de deux d'entre elles, le vert jaunâtre et le bleu, c'est-à-dire au moyen de E et de $F \frac{1}{3} G$, et les quantités nécessaires de ces deux couleurs lui ont donné les ordonnées des courbes de la couleur chaude et de la couleur froide, sur une grande partie du spectre, en valeurs de E et de $F \frac{1}{3} G$.

Telle est, je crois, le vrai moyen d'arriver à la solution du problème. Ces courbes, en effet, représentent, comme fonctions des longueurs d'onde, les deux énergies qui restent, et si l'on connaît aussi celles des trois énergies du système normal, on pourra juger si les premières correspondent à deux des dernières. Or, nous voyons que les courbes trouvées par Maxwell s'accordent d'une manière satisfaisante avec celles des énergies verte et bleue de l'œil normal [1]). Mais elle ne concernent qu'un cas unique, et dans ce cas, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut (p. 176), il est certain que la marche de la saturation n'a pas été indiquée d'une manière exacte. En outre, notre connaissance des courbes de l'œil normal est restée, même après le travail classique de Maxwell, si imparfaite, que le cas en question prouve peu pour lui-même et, pour d'autres cas, assurément encore moins.

M. Helmholtz aussi, nous l'avons vu, attendait des différentes formes de la dyschromatopsie l'indication des couleurs fondamentales du système normal. En traits rapides il nous donne le tableau complet des cas appartenant à la seconde classe de Seebeck, et il se convainc que deux couleurs, le jaune de chrome et l'outremer (avec le blanc et le noir), suffisent ici à produire, par leur mélange, tous les tons colorés. Partant de la position qu'il a trouvée, sur la table chromatique, pour le point noir invisible, il arrive à conclure que la couleur manquante doit corres-

---

[1]) Comp., dans *Philos. Transactions* 1860, la Pl. II, fig. 3, avec la Pl. I, fig. 6 et 7.

pondre à la couleur neutre du spectre, ou à sa complémentaire. Et dans le cas étudié, où la couleur neutre est claire, sa complémentaire obscure, il faut bien, dit-il, que ce soit à cette dernière. Pour celle-ci il trouve alors un rouge, composé de 38 p. d'outremer et 322 p. de cinabre, „dont la teinte est très voisine de celle du rouge spectral extrême, peut-être avec une légère tendance vers le pourpre".

Cette tendance au pourpre est, nous le savons aujourd'hui, la règle.

M. Helmholtz ne paraît pas avoir examiné si le système de son dyschromatopsique, complété par le rouge en question, serait égal au système normal.

Ces faits prouvent-ils maintenant que dans la dyschromatopsie, en général, la couleur manquante soit une des couleurs fondamentales?

Nous avons appelé fondamentales les couleurs qui ne peuvent résulter des autres, mais qui sont nécessaires pour les former. Nous admettons que chaque couleur fondamentale a son processus spécifique dans des éléments particuliers de la rétine, et, pour la caractériser avec précision, nous déterminons ses intensités subjectives en fonction des longueurs d'onde, supposant que ces intensités concordent avec celles du processus rétinien. En dehors de toute considération relative à la dyschromatopsie, nous sommes arrivés à ce résultat, que les couleurs fondamentales sont les couleurs limites du spectre — le rouge et le violet — et le vert central, c'est-à-dire, les couleurs que Young avait déjà désignées comme telles.

Or, dans la *cécité pour le rouge*, la couleur manquante n'est pas le rouge spectral, mais un rouge se rapprochant du carmin: un rouge, par conséquent, qui n'existe pas dans le spectre et qui ne peut être obtenu que par le mélange de deux couleurs spectrales, le rouge et le violet. Que cela soit contradictoire à la notion de couleur fondamentale, c'est ce que je n'oserais affirmer. On peut imaginer que les moins réfrangibles des rayons actifs, en même temps qu'ils excitent le processus d'une énergie

rouge carmin, éveillent aussi celui de l'énergie verte, et cela d'emblée avec assez de force pour que la teinte carmin soit déja neutralisée complètement dans le rouge spectral extrême. Mais, à coup sûr, il n'est pas rationnel de sacrifier à une hypothèse, qui doit expliquer les faits d'une manière si forcée, le résultat de recherches exécutées sans idées préconçues. Comment Maxwell a pu faire cadrer cette hypothèse avec la conclusion que le rouge (inclinant même à l'orangé), le vert et le bleu seraient les couleurs fondamentales, c'est ce qui reste une énigme pour moi.

Mais ce n'est pas tout. Il y a bien des années déjà, M. Rose [1]) a trouvé que la position du point noir n'est pas constante, qu'elle diffère pour chaque dyschromatopsique. La couleur manquante serait donc aussi chaque fois une autre. Au moyen du „*Farbenmesser*", qui donne des équations entre les deux tons neutres, on peut facilement se convaincre de ces différences. M. Helmholtz [2]), il est vrai, juge qu'elles pourraient dépendre (pour la même forme de dyschromatopsie) de la diversité du pigment rétinien chez des personnes différentes, influence sur laquelle Maxwell avait déjà attiré l'attention. Mais cela paraît insuffisant. Il est de fait que dans le système normal les intensités de l'énergie rouge sont une fonction assez constante des longueurs d'onde. Du moins, les intensités lumineuses relatives et les limites de visibilité du spectre à ce côté — et voilà de quoi il s'agit essentiellement — n'y présentent que de faibles différences individuelles. Par contre, chez les aveugles pour le rouge à système dichromatique pur, donc dans la forme complète de l'anomalie, les intensités lumineuses relatives et le raccourcissement du spectre au côté rouge varient beaucoup, comme nous l'avons vu, d'un sujet à l'autre. Les deux énergies du système, notamment celle qui domine au côté moins réfrangible, ne sont donc nullement les mêmes dans les divers cas de cécité complète pour le rouge.

---

[1]) *Archiv f. Ophthalmologie*, t. VII, 2, p. 72.
[2]) *Physiol. Optik*, p. 846.

Or, cette dissemblance ne saurait s'accorder avec la supposition que, chez les aveugles pour le rouge, l'énergie rouge du système normal ferait simplement défaut.

Dans la *cécité pour le vert*, j'ai trouvé plus d'analogie entre les divers viciés. L'extrémité rouge du spectre a chez tous à peu près la même limite, savoir, la limite normale, et la forme de la courbe d'intensité ne présente au voisinage de cette limite, comme nous l'avons vu, que des différences insignifiantes. Si l'on considère, en outre, que la ligne neutre a une position sensiblement constante et une intensité lumineuse relativement faible, on voit qu'il y a des raisons plausibles pour chercher ici la couleur manquante. Mais cela ne prouve nullement que le vert bleuâtre correspondant soit une des couleurs fondamentales du système normal.

Quant à la *cécité pour le violet*, aucun cas de cette forme rare de dyschromatopsie n'a été étudié jusqu'ici au spectroscope avec une exactitude suffisante. Toutefois, de ce qu'on a pu observer en divers cas, et notamment dans celui dont j'ai rendu un compte succinct, il résulte qu'ils ne se laissent pas expliquer par le simple défaut de l'énergie violette.

Notre conclusion générale est donc: qu'on n'a pas le droit de regarder les couleurs qui manquent dans les différentes formes de dyschromatopsie, comme les couleurs fondamentales du système normal.

Cette conclusion infirmerait-elle la théorie de Young?

M. Rose l'avait pensé, mais, à mon avis, entièrement à tort [1]). La rétine n'a pas été faite de main d'homme. Ce n'est pas un instrument à trois cordes, dont l'une serait cassée chez les dyschromatopsiques. C'est un instrument vivant, — *genitum*, *non factum*, dont les trois cordes, montées à des tons différents, se sont développées dans un accord mutuel. Si l'une reste en arrière, le ton des deux autres n'est certainement plus ce qu'il serait

[1]) M. Aubert (*Physiol. der Netzhaut*, p. 184), qui du reste n'est rien moins que partisan de la théorie de Young, avait déjà déclaré ne pas comprendre les objections de M. Rose.

devenu si toutes les trois s'étaient développées régulièrement. Aussi, bien loin de plaider contre la théorie de Young, la cécité pour les couleurs lui fournit un précieux appui. Car, — si les couleurs manquantes ne correspondent pas complètement aux couleurs fondamentales, il n'en reste pas moins le fait très significatif que vis-à-vis d'elles on trouve trois dépressions dans les courbes d'intensité du spectre (fig. 3), au côté rouge chez les aveugles pour le rouge, au côté violet chez les aveugles pour le violet, et au milieu chez les aveugles pour le vert. En outre, le système des dyschromatopsiques confirme d'une manière frappante le principe sur lequel la théorie de Young repose, à savoir, la réduction de toutes les sensations à un petit nombre d'énergies. La conception de la nature dichromatique du système anomal est, en effet, l'expression pure et simple des faits. Or, entre lui et le système normal, il ne peut pas y avoir de différence quant au principe. Les dépressions relatives des courbes d'intensité ne nous forcent-elles donc pas à postuler pour ce système une troisième énergie? Trois suffisent à rendre compte de toutes les couleurs, et, pour une quatrième, il n'y a pas place.

Toutefois, on ne peut pas se contenter de connaître les intensités lumineuses du spectre en général, comme fonction de la longueur d'onde. Il faut tâcher de les déterminer pour chacune des énergies séparément. Les sensations fondamentales des énergies peuvent être inconnues: les courbes des intensités n'en caractérisent pas moins, d'une manière complète, les énergies elles-mêmes et, par suite, le système entier. Jusqu'ici, Maxwell seul avait fait, il y a vingt ans, une détermination de ce genre; mais il s'était borné à un cas unique, pour lequel même, ainsi que nous l'avons vu, le résultat obtenu ne mérite pas une confiance absolue. J'ai essayé à mon tour, en me servant du spectroscope double, de déterminer, dans un certain nombre de cas, cinq points du spectre: la ligne neutre, les limites du spectre et les limites de saturation de la couleur chaude et de la couleur froide. L'exactitude de cette dernière détermination laissait à désirer. Mais, en outre, cinq points ne suffisent pas pour con-

struire des courbes dignes de confiance. Une tentative ayant pour objet de compléter ce nombre par la détermination des proportions des différents tons chauds et froids, nécessaires pour former du blanc, n'eut aucun résultat utile. L'ophthalmo-spectroscope de Glan ne me conduisit pas non plus au but.

Ce qu'il fallait, le voici:

1°. Un système de deux spectres qui, glissant l'un sur l'autre, donnent la faculté d'en isoler (dans la fente oculaire) des paires déterminées de couleurs, une chaude et une froide. Une semblable paire fournit, comme nous l'avons vu, par la variation des quantités relatives de chaud et de froid, des équations entre elle et toutes les couleurs du spectre.

2°. Un spectre simple, mobile au-devant de la paire choisie. Au moyen de cette paire, on peut alors composer chaque couleur de ce spectre, et les intensités de chaud et de froid nécessaires à cet effet, représentées par les largeurs des fentes respectives, donnent immédiatement les ordonnées de chaud et de froid pour chaque longueur d'onde.

Ces conditions furent remplies [1]) à l'aide d'un collimateur pourvu de deux fentes *couplées*, placées l'une à côté de l'autre, et d'une fente simple, au-dessous des deux premières, toutes ces fentes disposées de manière que dans les changements de largeur les deux bords se déplacent de quantités égales. Par l'action d'une seule et même vis, à filet enroulé dans les deux sens, les deux fentes couplées sont simultanément l'une élargie et l'autre rétrécie de la même quantité, depuis 0 jusqu'au maximum, de sorte que la somme des largeurs reste constante. Au moyen de ces fentes couplées, on peut mêler toutes les couleurs du spectre, pour toutes les intensités, dans toutes les proportions.

Je me suis assuré que les courbes d'intensité des deux énergies, chez les dyschromatopsiques, peuvent de cette manière être obtenues facilement et avec une exactitude suffisante. On trou-

---

[1]) Voir: *Proces-Verbaal van de K. Akad. van Wetenschappen*, séance du 26 février 1881.

vera nos résultats dans la thèse inaugurale de M. van der Weyde, laquelle se rattache directement à la présente communication et la suivra de près.

Pour qu'on puisse juger des rapports entre les systèmes anomaux et le système normal, il faudra que les courbes de ce dernier soient aussi déterminées exactement dans un certain nombre de cas. Ici encore, Maxwell est notre seul devancier, et, comme nous l'avons vu, ce qu'il a fourni ne saurait être réputé suffisant. Il était nécessaire de chercher une méthode plus pratique. A cet égard aussi, je crois avoir atteint le but [1]).

Les courbes une fois connues, nous ne savons encore rien de la saturation des couleurs fondamentales auxquelles elles se rapportent. Pour évaluer celles-ci, on déterminera dans les différentes parties du spectre les plus petites différences appréciables de la sensation et on fixera le nombre des tons susceptibles d'être distingués entre le ton le plus saturé et le ton neutre. J'ai déjà fait de pareilles déterminations et j'en ai aussi mentionné quelques-unes ci-dessus (p. 194). Ce travail sera continué.

Aux courbes se rattachent les sensations subjectives des dyschromatopsiques.

D'abord, je crois pouvoir admettre qu'ils voient la lumière ordinaire du jour comme la voit l'œil normal, c'est-à-dire, neutre, incolore.

[1]) Le collimateur porte une combinaison des fentes couplées avec une fente simple, celle-ci pouvant se placer à chaque côté des fentes couplées et aussi entre elles, et se mouvoir dans les deux sens entre des limites suffisantes. Au moyen de cette disposition, on peut obtenir un nombre quelconque d'équations entre des mélanges de trois couleurs et le blanc; tous ces mélanges forment alors aussi des équations entre eux, et de celles-ci on déduit les intensités des trois couleurs fondamentales, en fonction de la longueur d'onde. Les équations où entre le blanc s'obtiennent beaucoup plus facilement par cette combinaison de fentes', que par les trois fentes séparées de l'appareil de Maxwell. — M. Kagenaar, mécanicien du laboratoire physiologique d'Utrecht, a très bien executé les fentes couplées. Je ne doute pas qu'il ne réussisse également dans la construction de l'appareil plus compliqué dont j'ai fourni le projet.

Dans sa remarquable lettre à John Dalton (voir ci-dessus p. 174), Herschel dit: là où vos deux couleurs sont en équilibre elles forment *votre* blanc (comme s'il pouvait différer du nôtre); et William Pole ne décide pas si ses deux couleurs, qu'il tient pour être le jaune et le bleu, forment du vert ou bien du blanc. Mais, vis-à-vis de ce doute, Herschel [1]) devient plus affirmatif, car il se déclare „fortement disposé à croire qu'il (M. Pole) voit le blanc tout comme nous". Herschel, toutefois, se fonde seulement sur ce que le jaune et le bleu ne forment pas du vert, mais du blanc.

La raison pour laquelle, à mon avis, le blanc des dyschromatopsiques doit être identifié à celui des vues normales, gît plus profondément. Ce que produit l'ensemble des rayons lumineux doit nécessairement être la manifestation du processus total, et celle-ci, de sa nature même, contrairement à la manifestation partielle, est neutre, ou le deviendrait si elle ne l'était pas encore (voir ci-dessus p. 167). Les dyschromatopsiques qui se rendent compte de leurs sensations ne voient pas dans le blanc une troisième couleur, mais la négation des deux autres, quelque chose de neutre. Mêlé à chacune de celles-ci, il ne change pas la couleur, mais en affaiblit seulement la saturation, et lorsque, comme pour les vues normales, la couleur même se trouve plus ou moins modifiée, ils s'en étonnent, tout comme nous (voir plus loin la note de la p. 210), attendu qu'en lui-même le blanc est bien dûment incolore. Aussi, personne ne peut croire, et personne n'a jamais cru, que l'aveugle pour le vert voie dans le blanc une couleur pourprée, semblable à celle qui pour l'œil normal naît du mélange du rouge et du violet. Les objections que M. Hering, du point de vue des sensations chromatiques, fait à la théorie de Young, dépassent le but. Et ce qu'elles pourraient avoir de fondé ne touche nullement la théorie, mais seulement l'hypothèse que les deux énergies restantes seraient

[1]) Voyez dans les *Proceedings of the Royal Society*, 1859, X, sa note sur le mémoire de M. Pole.

égales à deux des énergies du système normal, — hypothèse que j'ai tenue strictement séparée de la théorie elle-même.

Partant de l'idée que la lumière blanche est vue neutre, incolore, par les dyschromatopsiques, j'ai cru pouvoir regarder leurs couleurs fondamentales comme complémentaires. Et si elles sont complémentaires, avec sensations semblables à celles des complémentaires pour l'œil normal, l'hypothèse en question se trouve même, par là, démentie directement. Car, dans la cécité pour le rouge devrait alors apparaître, comme complémentaire du violet, le même vert qui dans la cécité pour le violet est complémentaire du rouge, conséquence dont la possibilité est contraire aux faits. Eu égard aux indications fournies par des dyschromatopsiques intelligents, j'ai donc admis que les aveugles pour le rouge doivent avoir, comme couleur chaude, un jaune tirant sur le vert, les aveugles pour le vert un jaune tirant sur le rouge, et qu'à ces sensations correspondent respectivement, comme couleur froide, le violet et le bleu. Or, ce qui n'était qu'une supposition de ma part, est à peu près prouvé, au moins en partie, par les cas de dyschromatopsie unilatérale.

Je veux parler des deux cas qui ont été récemment décrits et étudiés avec soin par M. Holmgren [1]). L'un est relatif à un aveugle unilatéral pour le violet, l'autre à un aveugle unilatéral pour le rouge.

Son aveugle pour le violet voit le rouge et le vert, le rouge aussi loin que l'œil normal, le vert jusqu'en *G*; la ligne neutre se trouve au-delà de *D*. Le rouge est un peu moins orangé que le cinabre, un peu plus carmin que l'extrémité du spectre; le vert a une légère nuance de vert bleuâtre.

Son aveugle pour le rouge voit le jaune et le bleu, le jaune depuis *C* jusque près de *F*, le bleu jusqu'à l'extrémité ordinaire du spectre. Le jaune tire un peu sur le jaune verdâtre: clair, il est égal au jaune citron, obscur, au vert olive. Le bleu tend au violet et pourrait être appelé violet-indigo.

---

[1]) *Centralblatt der medizinischen Wissenschaften*, 1880, Nos 49, 50.

Ces résultats ont été obtenus en faisant désigner par l'œil normal les couleurs qu'observait l'œil dyschromatopsique. Or, les couleurs dont il vient d'être question ne sauraient être regardées comme représentant deux des couleurs fondamentales du système normal. En revanche, nous pouvons admettre qu'elles sont complémentaires Pour l'œil dyschromatopsique, cela ne souffre aucun doute. Si M. Holmgren ne mentionne pas que cet œil voit le blanc de la même manière qu'un œil ordinaire, c'est évidemment parce que l'idée ne lui est pas venue qu'il pût en être autrement. Eh bien, de ce blanc les deux couleurs sont les composantes, et effectivement elles forment une ligne neutre dans le spectre. Il s'agit donc seulement de savoir si elles sont aussi parfaitement complémentaires pour l'œil normal. Approximativement, elles le sont sans conteste: rouge et vert bleuâtre, jaune citron et violet indigo. Dans le Mémoire qu'il nous a promis, M. Holmgren lèvera bien tous les doutes à cet égard. Il s'agit ici du résultat le plus important de l'étude des deux cas observés.

L'intérêt redoublera quand on aura l'occasion de déterminer, dans des cas de dyschromatopsie unilatérale, les courbes d'intensité d'énergies dont les sensations correspondantes sont connues.

IV. Formes de passage.

La connexion entre tous les systèmes chromatiques ne peut être mise en pleine lumière que par l'étude des formes de passage.

Beaucoup d'auteurs ne font pas mention de ces formes. D'autres en révoquent l'existence en doute, ou la contestent tout à fait, ce qui provient évidemment de ce qu'ils n'ont examiné que des cas de dyschromatopsie notoire et n'ont donc jamais eu sous les yeux les formes en question. On doit songer qu'il faut relativement peu d'une troisième énergie pour préserver de confusions grossières, de sorte que les dyschromatopsiques incomplets passent ordinairement pour avoir la vue normale.

Ce qui a aussi contribué à nourrir les doutes, c'est que chez

les sujets affectés de dyschromatopsie complète, et surtout chez les aveugles pour le rouge, il existe souvent, en apparence, une trace de la troisième énergie. Quand on leur fait comparer *D* et *C* dans le spectroscope double, ils appliquent à la première couleur le nom de jaune, à la seconde très catégoriquement celui de rouge ou de rougeâtre, et cela sans jamais se tromper. En outre, ils déclarent avec tant d'aplomb voir, près de l'extrémité du spectre, du rouge, essentiellement distinct en couleur du jaune et du vert, qu'au premier abord on se laisse abuser par leurs affirmations, ainsi que cela m'est arrivé plus d'une fois à moi-même. Et finit-on par comprendre, à la suite d'équations entre des mélanges, qu'il n'y avait en jeu qu'une différence de saturation, on se laisse facilement entraîner trop loin, jusqu'à rejeter l'existence de la troisième énergie dans tous les troubles du sens chromatique, quels qu'ils soient [1]).

Mais quand on examine sous le rapport de la dyschromatopsie un certain personnel, en y employant différentes méthodes, on se convainc bientôt que le vice existe à des degrés très divers. Soumis à la première épreuve de Holmgren, où la couleur type est le vert pâle, quelques-uns montrent de l'hésitation. Ils prennent des teintes gris jaunâtre, jaunâtres ou rougeâtres, qui pour l'œil normal sont tout à fait différentes de la couleur d'épreuve, les rapprochent de celle-ci, afin de pouvoir mieux les comparer, les classent même auprès d'elle, les rejettent plus tard, et, finalement, assortissent d'une manière assez satisfaisante. Une pareille hésitation trahit ce que M. Holmgren appelle: „un sens chromatique faible". Ce sont des cas de ce genre dans lesquels, pour un but pratique, le sens des couleurs se laisse déterminer quantitativement au moyen de mon disque percé [2]) et se montre

[1]) Pour l'œil normal, une différence de saturation produit également une différence de couleur, très appréciable pour l'indigo et le violet. Chez les dyschromatopsiques, qui doivent se régler sur des différences de saturation, une pareille différence de couleur pourrait s'être développée dans une mesure plus forte.

[2]) *Archiv für Ophthalmologie*, t. XXIII. 4, p. 282. Voir la figure dans: *La Nature*, Masson, 1880, p. 69.

alors d'ordinaire très inférieur à ce qu'il est pour l'œil normal. Dans le spectre, ces indécis ne voient toutefois pas de ligne neutre N, et avec le „*Farbenmesser*" de Rose ils ne peuvent pas non plus réaliser l'équation entre deux tons également colorés ou plutôt incolores. Ils ont un sens chromatique faible.

M. Holmgren distingue ensuite, d'après les confusions faites par rapport au pourpre de la seconde épreuve, entre la cécité chromatique incomplète et la cécité complète pour le rouge ou le vert. Les criteria de la forme incomplète laissent toutefois à désirer dans cette méthode. Aussi n'ai-je pas été surpris d'apprendre de MM. von Kries et Küster (*l. c.*) que le mélange de *C* (rouge) et de *F* ½ *G* (bleu) leur a donné une équation avec le vert de $\lambda = 0{,}5015\ \mu$ chez des sujets que M. Holmgren aurait classés comme dyschromatopsiques incomplets. Mais, parmi ces sujets, il y en a certainement aussi qui ne sont pas tout à fait privés de la troisième énergie. Leur hésitation quant à l'existence d'une ligne neutre dans le spectre et quant à l'équation avec le *Farbenmesser* l'indique suffisamment. Comme épreuve ultérieure, on peut donc s'assurer, au moyen du spectroscope double, s'il est possible d'obtenir par le mélange de chaque teinte chaude avec chaque teinte froide, dans la proportion voulue, du blanc ou du gris purs.

A ce dernier égard, des résultats encore plus nets sont donnés par l'ophthalmo-spectroscope de Glan [1]). Cet instrument n'a qu'un seul collimateur, mais à deux fentes, l'une fixe, l'autre mobile, et de chaque fente on peut obtenir par un prisme biréfringent deux spectres, dont les intensités lumineuses relatives se laissent régler par un nicol. En portant l'un des spectres de la fente mobile sur l'un de ceux de la fente fixe, on peut faire coïncider successivement toutes les couleurs, dans toutes les intensités relatives. On trouve ainsi que pour certains dyschromatopsiques toutes les combinaisons du chaud et du froid peuvent former du

---

[1]) *Bericht über die wissenschaftliche Instrumente auf der Berliner Gewerbe-Ausstellung im Jahre* 1879, p. 394. Berlin, 1880.

blanc (comparable avec de la lumière blanche amenée par un tube auxiliaire et réfléchie sur le prisme), tandis que chez d'autres cela n'est possible qu'avec des combinaisons qui sont à peu près complémentaires aussi pour l'œil normal. Ces derniers sont alors les dyschromatopsiqnes incomplets. Au moyen du rouge et du bleu ceux-ci n'obtiennent pas du blanc, mais une teinte qui, vue à côté du blanc, leur paraît très décidément plus ou moins rouge ou rose, et qui ne devient d'un blanc pur que lorsqu'on y fait tomber, par le tube auxiliaire, un peu de vert.

Pour pénétrer plus profondément dans la connaissance de ces cas, on peut essayer de former, comme on le fait pour l'œil normal, des équations entre *trois* couleurs et le blanc, afin d'établir ainsi, au moins par approximation, les courbes des trois énergies. De ces énergies on doit ensuite, ce qui est ici un point essentiel, déterminer la saturation relative, tant entre elles que par rapport aux énergies du système normal.

Une seconde série de formes de passages se trouve entre la cécité chromatique *ordinaire* et la cécité chromatique *absolue* [1]). Pour les sujets affectés de cette dernière, toute impression lumineuse est incolore. Tous leurs tons oscillent entre le blanc et le noir.

Du système dichromatique au système achromatique en question, il n'y a qu'un seul pas. A côté de la sensation neutre, il ne saurait exister la sensation d'une couleur unique. La sensation neutre représente le processus complet, la couleur un processus partiel, et tout processus partiel en postule, comme complément, un second (voir p. 168). Le système doit donc être ou bien achromatique, ou bien dichromatique.

Les formes de passage sont les différents degrés de saturation

---

[1]) Dans un de ces cas extrêmement rares, que j'avais observé et décrit il y a déjà longtemps (Zehender, *Monatsblätter*, 1871, t. IX, p. 470), j'ai maintenant déterminé aussi les intensités lumineuses en fonction de la longueur d'onde et — je les ai trouvées analogues à ce qu'elles sont chez les aveugles pour le rouge. Courbe et méthode seront communiquées.

des deux couleurs fondamentales, saturation qui est égale à zéro dans le système achromatique.

On pourrait essayer de relier toutes les formes de passage — du système achromatique au système dichromatique et de celui-ci au système normal — en une ou plusieurs séries, et chercher ensuite jusqu'à quel point il serait permis d'y voir l'image du développement du sens des couleurs chez nos ancêtres. Mais l'une et l'autre tentative me semblent prématurées, tant que les types et les formes de passage n'ont pas été déterminés avec précision dans un grand nombre de cas. Il faudra, en outre, tenir compte des sensations de la vision indirecte. Car, évidemment, elles représentent des systèmes incomplets, qui paraissent susceptibles d'être déterminés plus exactement à l'aide d'équations entre des couleurs spectrales et des mélanges de couleurs. Or je ne voudrais pas, avec M. Ad. Fick [1]) et M. Bruecke [2]), prendre pour point de départ, dans l'explication de ces sensations, l'hypothèse que nous avons affaire ici, comme partout, aux trois mêmes espèces de „formations centrales'', c'est-à-dire aux trois énergies normales, et que la cause de la déviation doit être cherchée uniquement dans les éléments périphériques. La séparation rigoureuse entre le sens de la lumière et le sens des couleurs, que M. Charpentier [3]) défend en s'appuyant principalement sur les sensations indirectes, ne me paraît pas non plus soutenable. Si précédemment [4]) j'ai déclaré admettre, même dans la vision directe, la production simultanée du blanc avec chacune des trois énergies, mon idée était que dans les sphères optiques les énergies spécifiques ne se sont pas encore complètement isolées (différenciées) de l'état neutre primordial. Dans leur manifestation pure,

---

1) *Würzburger Verhandlungen*, 1873, t. V, p. 158.

2) *Ueber einige Consequenzen*, etc., 1 Abth., p. 21.

3) Dernièrement, dans: *Archives d'Ophthalmologie*, *publiées par* Panas, Landolt et Poncet, Paris, 1880, t. I, p. 48.

4) *Congrès périodique international des Sciences médicales*, 6me session, Amsterdam, 1879, p. 601. Comp. ci-dessus, p. 163 et 164.

telle que la suppose la théorie de Young, on pourrait donc voir le système de l'avenir.

Sous cette forme la théorie s'est montrée capable d'expliquer d'une manière plausible tous les faits connus. Ce résultat positif me suffit. Je ne veux ici, ni reproduire mes objections contre la théorie des „couleurs antagonistes", ni réfuter les critiques qu'on a adressées à celle de Young. Les premières, j'y reviendrai plus tard, en tant qu'elles touchent à des questions qui, abstraction faite de la théorie, méritent d'être examinées. Quant aux secondes, je crois que ma réponse est déjà impliquée dans ce qui précède.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.



RECHERCHES

SUR LA

NATURE DE LA LUMIÈRE ZODIACALE,

PAR

H. I. H. GRONEMAN.

I. Les caractères distinctifs des observations de Jones.

§ 1. Les observations de Jones [1]), entreprises dans les années 1853—1855, se distinguent de celles faites par d'autres astronomes, 1° par leur étendue, 2° par la situation favorable du lieu d'observation, le plus souvent en pleine mer, sous des latitudes différentes, à l'abri de toute influence de lumière étrangère ou d'impureté de l'air, et 3° par leur arrangement judicieux et pratique.

Tandis que d'autres observateurs n'inscrivent dans leurs cartes les limites de la Pyramide Zodiacale parmi les étoiles qu'après que cette Pyramide a pris son éclat maximum, M. Jones donne ces limites à différents moments d'une même nuit et surveille

[1]) *Observations on the Zodiacal Light from April* 2, 1853, *to April* 22, 1855, *by Rev.* George Jones, *A. M. Chaplain United States Navy*, *Washington* 1856.

avec soin les commencements et les développements du phénomène, ainsi que sa manière de disparaître. D'ailleurs il contrôle ses propres observations en demandant la coopération d'autres personnes, disposant de bons yeux, comme presque tous les marins [1]). Homme consciencieux, il rejette les observations que lui-même avait faites dans la période où il n'avait pas encore acquis l'expérience nécessaire [2]). Du reste, il ne laisse passer aucune occasion favorable, excepté les dimanches. Ainsi son œuvre porte tous les caractères intrinsèques d'authenticité, authenticité qui ne pourrait être rejetée que si d'autres observations, en grand nombre et dues à des savants différents, dignes de foi, venaient la contester.

§ 2. D'un autre côté, l'auteur de cette longue série d'observations a combattu en lui-même, jusqu'à la fin du voyage, l'inclination à former des hypothèses [3]). Il voulait être observateur, et non théoricien. En second lieu, il donne ses observations comme elles furent faites, sans réduction ni embellissement. „Had „I allowed myself to refer back, and so to guide myself along „by former data, or to theorize, I could have made the results „more symmetrical and harmonious; but, I declined seeking for „symmetry or even consistency at such a risk." Il nous dévoile ses propres scrupules. Souvent on rencontre des expressions telles que celles-ci: *„I give this however, with hesitation. At other times „I was more certain. I have givem them* (les limites de la L. Z.) *„as, after careful consideration, they seemed to me to be*".

§ 3. Pour toutes ces raisons, nous regardons les trois cents observations de M. Jones, accompagnées d'autant de cartes, pourvues de tous les éléments nécessaires de lieu et de temps,

[1]) *„For I determined, in the first place, to get facts*" (p. X).

[2]) *„For although I had been a careful observer since Dec. 22 of the previous year, I consider the interval as having been necessary in order to gain experience, and I have consequently rejected all upon the period mentioned*" (p. XIV).

[3]) *I also repressed in myself, as strenuously as I could, until the very last of the cruise, all disposition to form hypotheses.*

comme un travail précieux, dont on chercherait en vain le pareil en cette matière.

§ 4. Les cartes célestes, données par M. Jones, contiennent, outre les étoiles nécessaires, les projections de l'équateur et de l'écliptique, celles des horizons et les lieux du zénith aux différentes heures d'observation, mais surtout les limites des parties de la Pyramide Zodiacale, avec les heures d'observation inscrites à côté. D'ailleurs on trouve, vis-à-vis de chaque planche, une note donnant le récit minutieux de chaque observation [1]).

II. Examen et critique de la première partie du Traité de M. Serpieri [2]).

§ 5. Dans son 1er chapitre, M. Serpieri donne une description du travail de M. Jones et de la réduction, entreprise par lui, des observations de ce voyageur; il y joint l'énumération des divers lieux où ces observations furent faites, durant l'expédition du navire américain.

Ainsi qu'on le trouve mentionné aussi dans l'ouvrage de Jones, ces lieux s'étendent de 41° Lat. bor. jusqu'à 53° Lat. mér.

„*J'étais étonné*", dit M. Serpieri (chap. I p. 2), „*de rencontrer un si grand nombre d'observations non encore étudiées*, „*que les astronomes américains* Gould, Olmstedt, Chauvenet *et* „*autres savants illustres avaient jugées déjà d'une manière favorable*, *et je me disais: ou bien la L. Z. n'a point de lois*, *ou*, „*si elle en a*, *c'est ici qu'elles doivent se laisser trouver* . . . . „*Mais une longue série de planches se prête mal à une étude*

[1]) Nous croyons devoir passer ici sous silence les observations remarquables de Jones sur la L. Z. lunaire, formant, avec celles de Cassini, la fin du volume.

[2]) *La Luce Zodiacale*, *sue leggi e teoria cosmico-atmosferico dedotte dalle osservazioni di* G. Jones *par il* P. A. Serpieri *D. S. P.*, *direttore dell' osservatorie meteorologico di Urbino.* (*Estratta dall' Appendice al Giornale degli Spettr. Italiani* V, 1876).

„d'analyse. La seule voie pour approfondir quelque matière, *c'est „de réduire en nombres les formes et les positions notées dans „chaque observation; car les lois cachées et cherchées ne seront*, *„en fin de compte*, *que des rapports avec des éléments déter- „minés de la terre et du ciel*" [1]).

§ 6. Dans le IIme chapitre, M. Serpieri traite de la composition de la L. Z. Après avoir rappelé sa couleur souvent tirant sur le jaune, bien différente de celle de la voie lactée, et sa transparence plus ou moins prononcée, qui permettait à Jones d'apercevoir quelquefois des étoiles de 6me et de 7me grandeur à travers la partie lumineuse de la Pyramide Zodiacale (Serpieri, p. 5, Jones, p. 542), l'auteur s'occupe dans ce chapitre de la différence entre ses propres observations et celles de Jones, quant à la division de la Pyramide en „*Lumière diffuse*", „*Lumière centrale*" et „*Lumière pâle*", parties auxqu'elles s'ajoute encore, plus rarement, la „*Lumière éclatante*" (*the effulgent light* de Jones). Il est bien remarquable que la division susdite, établie par Jones, n'ait pas été observée par M. Serpieri. Pour lui, la clarté de la Pyramide s'amoindrissait toujours graduellement de l'axe vers les côtés et de la base vers la pointe [2]). Quelque étrange que nous semble cette circonstance, c'est une des preuves de la véracité de cet auteur, qui tire tant de conséquences des propriétés découvertes par Jones dans ces différentes parties du phénomène. Feu le prof. Heis, l'observateur infatigable d'Aix-la-Chapelle et de Munster, tout en acceptant la division mentionnée, ne semble pas l'avoir remarquée lui-même.

§ 7. Nous devons observer ici que cette division a été constatée indubitablement par M. H. Eylert (Heis, *Zodiacallicht-*

---

[1]) Nous croyons opportun de dire que nous traduisons ici, comme dans ce qui suit, les paroles de M. Serpieri.

[2]) „*Pa noi la densità* (*o lo splendore*) *va gradatamente decrescendo „dall' asse ai lati*, *dalla base alla cima*, *senza interruzioni o salti*, *che „segnino ad un tratto quasi una mancanza di continuità degli strati „esteriori.......*, *in una parola noi vediamo il fenomeno tutto fatto d'un „getto*" (p. 5).

Beobachtungen, p. V) dans le voisinage des tropiques, et par nous à Groningue (voir la Note accompagnant un dessin du phénomène dans l'*Appendice al Giornale d. Spettr. Italiani*, vol. VIII). D'ailleurs, la Lumière diffuse et centrale a été observée en Bohême par M. Brorsen, le 27 Mars 1878 (Heis *Zodiacall. Beob.*, p. V), et à Melbourne par M. Neumayer, le 17 Oct. 1859 (Même ouvr. p. 22, où l'on trouve les limites des deux parties séparément). Surtout M. Weber de Pekeloh donne souvent les limites des deux Pyramides (voir Heis, *Zodiacall. Beob.*, p. 53 etc.). Après tant de témoignages, il est presque superflu de dire qu'il ne peut rester aucun doute à l'égard de l'existence de ces parties.

§ 8. On doit ajouter, toutefois, que ces parties ne se montrent pas constamment ensemble. Il est très important de savoir que souvent on ne voit que la Lumière diffuse, c'est-à-dire la partie la plus faible, si l'on excepte la Lumière pâle: circonstance sur laquelle nous reviendrons plus tard.

§ 9. Dans son IIIme chapitre, M. Serpieri mentionne le phénomène qu'il nomme les „Phases" de la L. Z.", c'est-à-dire les déplacements de la pointe, soit dans la direction du soleil, soit en sens contraire, déplacements qui se présentent tous deux le matin et le soir.

Vu que Jones n'a donné que des faits, c'est-à-dire les positions des limites de la Pyramide à différentes heures, c'était un travail très étendu que de réduire ces positions en nombres, afin d'obtenir la loi de variabilité du phénomène. L'auteur cite (p. 11) deux exemples d'observations de Jones, pour bien faire connaître la manière dont celui-ci décrit ses observations, en regard de chaque planche. Nous reproduirons ici le texte même de Jones, tout en choisissant une des observations citées par M. Serpieri

N°. 91.

„*December* 29th, 1853, Evening.
„*Lat.* 22° 18′ N. *Long.* 114° 10′ E.
„*Sun set* 5 h. 23 m.

„*Stronger Light* at	7 h.	0 m.	*Diffuse* 6 h.	45 m.
	7	15	7	15
	7	30	7	30
	8	30	8	30
			9	30

„Atmosphere remarkably clear. Sky unclouded. Watched to see „how the Z. L. would first show itself. It came so gradually „that nothing belonging to it could be made out, till at $6^h 30^m$, „it was evident that the sky along its place had paled somewhat. „The twilight is long, and at 6^h 35^m darkness had not fairly „set in. But the Z. L. was faintly marked in the sky, even „before the stars were all fully out. The light was not strong „enough to get boundaries till $6^h 45^m$, when I got those of the „Diffuse L.; the Stronger did not show itself distinct from the „other till $6^h 55^m$; at 7^h, I got its boundaries. For the rest, see „the chart. The light was brightest at about $7^h 30^m$. The Stronger „had dimned at $8^h 30^m$, but was yet good. At $9^h 30^m$ there was no „Stronger Light as such; buth the Diffuse was very bright, the „Stronger seeming to have spread into this. Exhausted by last „night's watching, I now went to bed."

Voici comment M. Serpieri réduit, au moyen de la carte à laquelle cette note se rattache, les phases en nombres. Nous traduisons ses paroles, en nous bornant au premier des deux exemples en question:

„A $7^h 15^m$ les deux Pyramides se sont élevées le long de l'écliptique, comme il suit:

La Pyr. centrale de 4°; La Pyr. diff. de 8°.

„A $7^h 30^m$ nouvelle élévation:

La Pyr. centrale de 8°; La Pyr. diff. de 6°.

„A $8^h 30^m$ nouvelle élévation:

La Pyr. centrale de 7°; La Pyr. diff. de 21°.

„A $9^h 30^m$ la L. centrale semblait dispersée et confondue avec „l'autre, et la Pyr. diffuse avait éprouvé une nouvelle élévation „de 14° . . . . Ces mouvements, ainsi que les variations des „côtés, sont représentés dans la table suivante, où je donne la

„*latitude des côtés à* 20° *et* 40° *sous le sommet*, *c'est-à-dire à* „*des longitudes moindres de* 20° *et de* 40° *que celle du sommet.*

	Heure.		Position du sommet. Long.	Elong.	Lat.	Latitude des cotés Coté mérid. à 20° sous le sommet	Coté mérid. à 40°	Coté sept. à 20°	Coté sept. à 40°
Lum. centr.	7h	0m	343°	65°	— 1	— 9	— 11	+ 9	+ 12
	7	15	347	69	0	— 8	— 11	+ 8	+ 12
	7	30	355	77	+ 1	— 7	— 10	+ 9	+ 12
	8	30	2	84	0	— 7	— 9	+ 9	+ 11
Lum. diff.	6h	45m	18	100	0	— 12	— 15	+ 13	+ 16
	7	15	26	108	0	— 16	— 19	+ 16	+ 21
	7	30	32	114	0	— 15	— 19	+ 15	+ 20
	8	30	53	135	— 1	— 14	— 16	+ 12	+ 16
	9	30	67	149	+ 1	— 14	— 17	+ 17	+ 23

„*Pendant que ces variations avaient lieu*, *l'écliptique était presque* „*perpendiculaire à l'horizon. En effet*, *le Zénith de l'observateur* „*restait*, *durant les phases de la Lum. centr.*, *entre les latitudes* „+ 11° *et* + 4,° *et durant celles de la Lum. diffuse*, *entre* + 13° „*et* + 1°."

§ 10. De ces réductions, que l'auteur s'est donné la peine de tirer des nombreuses observations de Jones, M. Serpieri déduit les lois suivantes (p. 13):

„1°. *Que dans les observations du soir la Lumière centrale*, „*sur* 169 *cas*, *dans lesquels elle se montra sous une forme assez* „*distincte et complète*, *présentait* 131 *fois le phénomène d'élévation* „*progressive dans le cours de la nuit*, *et la Lumière diffuse*, *sur* „165 *cas*, 97 *fois.*

„2°. *Que le soir*, *sur* 136 *observations de la Lumière centrale*, „*se montrèrent* 93 *fois les phases d'abaissement progressif*, *alors* „*que l'aube du jour s'approchait; et sur* 109 *observations de la* „*Lumière diffuse*, *on trouva* 43 *fois les mêmes phases.*

„3°. *Que souvent ces phases acquirent de très grandes valeurs,* „*et que l'élévation ou l'abaissement seul fut souvent même plus* „*grand que la valeur de l'élongation primitive.*"

„4°. *Que parfois le sommet de la Pyramide resta fixe, tandis* „*qu'il y avait des phases d'élargissement ou de rétrécissement de* „*la dite Pyramide.*"

§ 11. L'auteur fait suivre ces lois de deux tables, contenant quelques phases d'élongation à différentes dates, le soir et le matin; il dit ensuite (p. 19):

„Nous avons donc le soir les grandes élévations [1]) de 20°, „30°, 40°, 50° et enfin de 60°. Et par conséquent, si l'on „remarque que le cône que nous voyons se trouve à l'ordinaire „entre les élongations de 100° et 70° (Heis trouva la moyenne „annuelle de 83°), il résulte de ce qui précède que ces phases „pourront souvent avoir le sens de la création d'un Cône Zodiacal tout nouveau". [2])

. . . .

„Ainsi le fait bien certain des phases de la L. Z. est grand „et merveilleux, et, pour le produire, doit agir la même cause „principale, qui engendre cet immense phénomène dans toute „son intensité".

Il faut bien remarquer que Jones n'a vu rien de surprenant dans les déplacements, dans le sens de l'écliptique, du sommet de la Pyramide Zodiacale, déplacements qu'il incline, ce nous semble, à attribuer aux variations de l'obscurité (voir p. 376, observ. N°. 188). Naturellement, cette circonstance augmente la confiance qu'inspirent ses observations à cet égard.

§ 12. Nous voici arrivés au paragraphe 16, dans lequel M. Serpieri traite la question de savoir si ces changements d'élon-

---

[1]) A proprement parler, il vaudrait mieux lire ici *changement d'elongation.* Le mot „*alzamenti*" se rattacherait plutôt à un mouvement par rapport à l'horizon que par rapport au soleil.

[2]) En effet, nous mentionnerons plus tard une observation de ce genre (§ 19, γ).

gation ne peuvent pas être occasionnés par l'obstacle que la lumière crépusculaire met à la visibilité du phénomène.

Il est de notre devoir d'examiner cette question d'autant plus à fond, qu'une réponse affirmative semble avoir beaucoup de probabilité. Quelle explication plus vraisemblable par elle-même que d'attribuer l'invisibilité de la Lumière Zodiacale, en plein jour, à la même cause que nous empêche alors de voir les étoiles ou, pour prendre un exemple plus analogue, les queues cométaires! Cette supposition est si naturelle, qu'elle a sans doute entraîné plus d'un critique à accuser M. Serpieri de légèreté scientifique, tandis qu'on pourrait plutôt reprocher à ces juges de n'avoir pas lu assez attentivement ses arguments en faveur de la thèse: que les „phases" de la L. Z. ne sont pas occasionnées par les variations du crépuscule ou de la transparence de l'air.

§ 13. Nous pouvons mentionner ici, comme preuve de ce qui précède, l'écrit de M. H. Geelmuyden [1]). En voici un passage, que nous croyons devoir traduire.

Après avoir parlé des phases qui nous occupent, M. Geelmuyden dit:

„Vu qu'il est indubitable que l'air, même quand aucun nuage „ne se montre au ciel, n'est nullement toujours d'égale trans-„parence, et que cette transparence doit beaucoup influencer „une opération aussi délicate que la détermination des limites de „la Lumière Zodiacale, — on peut compter d'avance sur le fait „que l'étendue de cette lumière est variable à certaines époques, „ainsi que, en général, pour des pays de climat différent. Qu'une „telle variabilité dans la transparence de l'air puisse prendre un „caractère périodique, aussi bien dans le cours de l'année que „dans celui du jour, cela est très probable, surtout au voisinage „des tropiques, avec leurs pluies périodiques et leurs autres „phénomènes réguliers.

„Nous ne voulons pas prétendre, par ce qui précède, que les

[1]) *Om Zodiakallyset*, Kristiania, Alb. Cammermeijer, 1878.

„propriétés signalées par Serpieri ne *puissent* être expliquées „que de cette manière, *mais, alors qu'il existe une cause pos-„sible si proche, il n'est pas permis de se borner exclusivement „à des forces internes et inconnues et de fonder sur elles une „théorie de propre invention, sans avoir d'abord examiné soigneu-„sement, si la cause possible ci-dessus indiquée n'est pas la cause „véritable. L'auteur lui-même n'a pas été sourd aux objections „qui pourraient s'élever de ce côté, mais c'est à peine s'il les a „traitées avec le soin nécessaire. A vrai dire, il n'avance qu'un „seul argument de quelque valeur pour soutenir sa manière de „voir, et cela à propos d'une autre propriété, celle qu'il nomme „les pulsations*" . . . . .

On le voit, M. Serpieri est accusé de prévoir des objections graves d'un certain côté et de ne pas les traiter avec le soin nécessaire. C'est bien là, comme nous l'avons dit plus haut, une accusation de légèreté scientifique.

§ 14. Mais cette accusation retombe sur M. Geelmuyden, car M. Serpieri, outre les pulsations, produit encore plusieurs raisons très valables, auxquelles nous-même en ajouterons quelques autres, pour soutenir la thèse attaquée.

Du reste, celui qui prouve qu'une certaine supposition mène à une conséquence absurde n'a plus besoin de rechercher directement si cette supposition indique „la cause véritable", comme M. Geelmuyden l'exige. Or c'est précisément de cette manière que M. Serpieri traite la question, — selon nous, avec toute la rigueur nécessaire, — en montrant que la Lumière Zodiacale présente des propriétés ne s'accordant pas avec l'idée que ses phases ne seraient qu'une apparence, due au crépuscule ou à la transparence de l'air.

En effet, acceptons un moment cette dernière cause; supposons que le soleil vienne de se coucher et que la lueur crépusculaire soit encore trop forte pour laisser entrevoir les figures lenticulaires de la Lumière centrale entourée du manteau plus faible de la Lumière diffuse. Ces deux „Pyramides", comme nous continuerons à les nommer, en suivant le soleil dans son mouvement

diurne, s'approchent de plus en plus de l'horizon; l'obscurité s'avançe continuellement, et nous demandons: *quelle partie du phénomène se montrera la première, la plus ou la moins lumineuse?*

On pourrait défendre l'opinion que si la Lumière diffuse, c'est-à-dire la partie la plus faible, paraît la première, c'est parce que l'autre est plus proche de l'horizon et éprouve ainsi, plus qu'elle, l'influence de l'absorption atmosphérique.

Mais il n'en saurait être ainsi, car en réalité la Lumière diffuse est observée à la même élongation, où se montre plus tard la Lumière centrale. Or, si les parties de la première possèdent la même élongation que celles de la seconde et, par conséquent, éprouvent la même, sinon une plus grande influence obscurcissante de la part de l'air éclairé encore par l'astre du jour, elles ne pourront, dans la supposition faite plus haut, être observées avant la Lumière centrale. C'est donc bien, en acceptant cette supposition, la Lumière centrale, ou la plus forte, qui apparaîtrait la première (le soir), de même que la tête d'une comète, quoique plus proche de l'horizon, se montre aussi avant que l'on commence à entrevoir la queue, éclairée plus faiblement.

Peut-il rester ici aucun doute, la réalité étant en contradiction complète avec les conséquences de l'hypothèse susdite, que la Lumière centrale ne jaillisse effectivement plus tard et que ses phases ne soient, du moins en grande partie, chose réelle?

Nous venons de développer, en termes un peu différents de ceux de M. Serpieri (p. 20), son premier argument, auquel, quoique passé sous silence par M. Geelmuyden, on ne peut refuser un caractère concluant et décisif. Ajoutons que la succession des moments d'apparition des deux parties de la Pyramide Zodiacale a lieu presque toujours de la manière décrite, le soir, et en ordre inverse, le matin.

Nous sommes loin, toutefois, de vouloir dire que la Lumière diffuse, prise en masse, se montrerait, le soir, avant qu'aucune partie de la Lumière centrale soit aperçue, quoique cela arrive quelquefois (voir les observations de Jones, pag. 182, 196, 235 et 377 et notre propre observation ζ, § 19 de ce Mémoire).

Le deuxième argument en faveur de la thèse de M. Serpieri est énoncé par lui dans les termes suivants (p. 20):

„On ne trouve jamais dans les observations de Jones que le „Cône central s'élève jusqu'à la cime du manteau de la Lumière „diffuse, ou qu'il la traverse et la surpasse, en s'élevant tout „isolé au-dessus de cette dernière. Il n'y a donc aucune cause „qui occulte les parties plus fortes du phénomène, car, dans ce „cas, ce seraient les effusions plus faibles, peut-être les cimes du „Cône diffus, qu'on verrait occultées à un bien plus haut degré, et „de cette manière ces parties laisseraient paraître les cimes du „Cône central privées de leur auréole accoutumée [1]). Le matin „également, les deux lumières demeurent tellement combinées „que la partie diffuse ne descend jamais plus rapidement que „la partie centrale, de sorte qu'elle ne la laisse jamais dépourvue „de son manteau [2]).

„Par contre, toujours, le soir comme le matin, les phases „les plus fortes et les plus rapides sont celles du Cône le plus „dense et le plus lumineux, c'est-à-dire du Cône qui devrait „sentir moins fortement l'influence de la transparence variable „de l'atmosphère; tandis que dans la Lumière diffuse, en com„paraison avec l'autre, se trouve une certaine lenteur de mou„vement, même quelquefois une tendance à se tenir invariable „et fixe, quand l'autre accomplit les phases les plus étendues".

---

[1]) Nous avons cru devoir traduire ainsi le passage italien suivant: „Adunque non v'ha mai alcuna cagione che occulti le parti sublimi del „fenomeno, perchè in tal caso sono l'effusioni più deboli, ossia le cime del „cono diffuso, che più spesso verrebero occultate, e per tal modo farebbero „comparire senza la solita aureola le cime del cono centrale."

[2]) Dans la longue série d'observations de Jones, nous en avons trouvé très peu qui font exception à cet égard: 1° celle (p. 111) du 14 sept. 1853, le matin, dont Jones dit: *„At 4h 28m dawn had advanced so as to overpower the Diffuse Light. The Stronger Light was remarkably bright just before dawn;* 2° parmi les observations du soir, nous n'avons trouvé que celles du 20 Oct. 1853 (p. 141 de Jones), du 31 Oct. 1853 (p. 157), du 25 Juillet 1854 (p. 381) et du 11 Oct. 1854 (p. 449). Les exceptions étant si peu nombreuses, on voudra bien laisser passer le mot „jamais" de M. Serpieri.

L'auteur ajoute que la „Lumière pâle" possède aussi ce caractère d'invariabilité, *de sorte que les changements d'élongation sont plus grands à mesure que les parties du phénomène sont plus lumineuses.*

Nous ne saurions décider si le deuxième argument, en faveur de la thèse de M. Serpieri, est moins concluant que le premier.

Comme troisième argument l'auteur mentionne la régularité des phases sous toutes les latitudes géographiques et, *en passant*, le phénomène de ces „pulsations", *qui ne se montrent que dans la Lumière centrale*, tandis que la Lumière diffuse demeure tranquille: circonstance qui s'oppose formellement à l'explication de M. Geelmuyden c. s.

Nous reviendrons plus tard aux „pulsations" et à la critique que M. Geelmuyden a formulée à cet égard.

Le quatrième argument de M. Serpieri est tiré principalement des contractions dans le sens de la largeur, que la Pyramide Zodiacale éprouve à mesure qu'elle s'allonge, et de son élargissement, à mesure qu'elle s'abaisse. Evidemment, en admettant pour un moment que les changements en longueur soient une conséquence de l'obscurité progressive de la nuit et du mouvement diurne qui entraîne la Pyramide après qu'elle a acquis sa longueur maximum, cette cause ne pourrait pas exercer sur les dimensions en largeur une influence inverse de celle qu'elle produirait sur les dimensions en longueur. „L'élargissement qu'il (le Cône „Zodiacal) éprouve presque toujours pendant qu'il s'abaisse, ne „peut provenir des changements dans la pureté de l'air, car „celui-ci devrait alors, dans le même temps, occulter quelques „parties et en laisser entrevoir d'autres" (Serpieri, p. 21).

Cependant l'auteur semble ici oublier qu'il a pris (voir la table p. 7 ci-dessus, p. 12 de l'ouvrage de M. Serpieri) les latitudes des côtés chaque fois à 20° et 40° *au-dessous de la cime.* L'élargissement et le rétrécissement calculés ne répondent donc pas à la même élongation. Or, dans le cas seulement où ils rempliraient cette condition, l'argument employé serait applicable. Dans le cas actuel, il laisse beaucoup d'incertitude.

Pour décider la question, nous avons fait une recherche spéciale dans les planches de Jones, et nous avons trouvé qu'en effet les changements opposés en largeur ont lieu très-souvent dans le même cercle de latitude céleste, soit pour la Lumière centrale, soit pour l'autre, soit enfin pour toutes les deux. Nous ne citerons que les pages suivantes de l'ouvrage de Jones: 39, 61, 75, 77, 85, 97, 99, 101, 111, 113, 129, 133, 135, 159, 175, 195, 221 etc. Le quatrième argument conserve donc toute sa valeur, d'autant plus que la circonstance dont il s'agit ici n'est nullement une exception.

On voit que ces quatre arguments de M. Serpieri ne méritent à aucun point de vue d'être passés sous silence. Ils peuvent soutenir un examen approfondi, et les défenseurs de l'hypothèse crépusculaire devraient tâcher en première ligne de faire disparaître la contradiction entre ces arguments et leur théorie, qui jusque-là restera insuffisante. Il faut remarquer ensuite que, si les „phases" sont occasionnées par un changement réel des dimensions de la Pyramide, les „phases d'abaissement" du soir et les „phases d'élévation" du matin n'indiquent plus une participation à la rotation diurne du globe céleste.

§ 15. Restent les *pulsations*. Vu l'intérêt extraordinaire de la question, nous voulons d'abord communiquer les remarques de M. Geelmuyden. Cet auteur commence par donner une définition assez peu correcte du mot, en disant que la propriété des pulsations, „suivant le journal de Jones, consisterait en „ce que l'étendue de la Lumière Zodiacale et son intensité „subissent quelquefois des augmentations ou des diminutions à „des intervalles de quelques minutes." Nous voudrions ajouter que ces changements s'accomplissent soit dans l'étendue seule, soit dans la clarté seule, soit dans toutes les deux à la fois. Ces pulsations, selon M. Serpieri, ne seraient pas explicables par des variations de transparence de l'air, vu qu'on ne les observe pas, en même temps, pour les étoiles et pour la voie Lactée.

Après avoir reproduit cette remarque, M. Geelmuyden continue: „Nous ignorons jusqu'à quel point Jones a dirigé son

„attention simultanément sur ce (dernier) sujet, mais il existe „pourtant cette différence réelle entre la Lumière Zodiacale et „la Voie Lactée, que les contours indécis de la première accu-„sent chaque changement dans la transparence de l'atmosphère, „surtout par son étendue, tandis que la Voie Lactée, avec ses „limites relativement bien définies, peut subir des changements „d'éclat qui naturellement seront plus difficiles à remarquer. On „peut en dire autant des étoiles."

En premier lieu, on pourrait répondre que la Voie Lactée contient une multitude de parties d'un éclat tellement faible, qu'elles devraient accuser les changements de pureté de l'air aussi vivement que les contours de la Pyramide Zodiacale. Quiconque connaît l'*Atlas coelestis* du Dr. Ed. Heis, dans lequel cet observateur consciencieux a indiqué les différentes nuances de la Voie Lactée, partagera cette opinion, surtout s'il a comparé ces nuances avec la nature.

Mais, en second lieu, M. Geelmuyden se trompe en pensant que Jones n'a pas dirigé son attention „simultanément" vers la Voie Lactée, lorsqu'il observait les pulsations de la Lumière Zodiacale. Le contraire est prouvé, avec la plus grande évidence, par sa description des observations où la Pyramide, tout en montrant des „pulsations", croisait la Voie Lactée. Un observateur aussi attentif que Jones n'aurait pas manqué de noter des „pulsations" dans la Voie Lactée, — *qu'il examinait en même temps*, comme les cartes l'attestent, — si ces pulsations y avaient réellement eu lieu à ce moment [1]).

Du reste, pas plus que M. Serpieri [2]), nous n'avons jamais

[1]) On trouve les observations susdites p.e. p. 271, 273, 289, 299 etc. de l'ouvrage de Jones.

[2]) Cet auteur dit: (p. 73): „*Infatti l'aspetto della Via Lattea non offre* „*mai ondulazioni di tal sorta..... Io credo anzi'che coteste ondate si* „*svelerebbero nel cielo anche fuori della Via Lattea; et stando noi osser-* „*vatori delle meteore luminose tanta ore di seguito a guardare nel cielo* „*stellato in aspettazione di qualche stella cadente, molte volte ci saremmo* „*avvisti di questo passare di onde luminose ed oscure..... Un rapido* „*passare di lume o di ombra, in più migliaia di notti vegliate, non l'ho* „*mai visto nè sulla Via Lattea, nè in altre parti del firmamento.*"

trouvé quelque part la moindre mention de pulsations dans la Voie Lactée, indiquant des variations périodiques dans la pureté de l'atmosphère.

§ 16. Outre cette preuve négative, les pulsations offrent encore une preuve positive qu'elles ne sont pas occasionnées par les variations susdites de l'atmosphère. En effet, comment expliquer, dans ce cas, que parfois les pulsations affectent seulement l'intensité lumineuse de la Pyramide, tandis que les contours demeurent intacts? Comment expliquer que ces pulsations ne se montrent pas dans la Pyramide diffuse en même temps que dans la Pyramide centrale, bien que la première devrait, en vertu de son moindre éclat, accuser beaucoup plus vivement ces variations de transparence de l'air? [1])

§ 17. Ainsi, tout nous mène involontairement à la conclusion que les „phases" de la L. Z. indiquent d'une manière concluante une certaine variation interne du phénomène, ce qui toutefois n'empêche pas d'accepter la supposition que le degré d'illumination de l'atmosphère doit l'influencer de son côté [2]).

§ 18. Mais on pourrait objecter que nos arguments se fondent principalement sur les observations d'une seule personne, d'un pasteur de la marine américaine, qui ne possédait aucune autorité scientifique quand il commença ses recherches, labori-

[1]) On trouve des descriptions de pulsations de la première sorte dans l'ouvrage de Jones p. 195, 227, 239, 271; tandis que la p. 223 offre un bel exemple de pulsations de la deuxième sorte, lesquelles se rencontrent aussi p. 237, 241, 243, 249, 257, 259, etc.

[2]) M. Geelmuyden pense que M. Serpieri se trompe en admettant, avec Kämtz, que la durée du crépuscule dans les pays tropicaux est égale à un quart d'heure; cela ne concernerait que le crépuscule civil, non le crépuscule astronomique. Suivant M. Geelmuyden, le crépuscule astronomique n'aurait jamais de durée plus courte que de 1 heure 4 minutes, le soleil atteignant alors un abaissement au-dessous de l'horizon de 16°. Cette objection n'empêche pas que les phases ne se soient montrées à Jones jusqu'à à 5½ heures après le coucher du soleil, le 1 Nov. 1853, à une latitude géogr. de 22° 23′. Nous trouvons que le soleil atteignait alors l'abaissement de 16° à environ 6h 45m, tandis qu'il se couchait à 5h 19m. Ainsi les phases furent observées par Jones jusqu'à 4h 15m après la fin

euses, il est vrai, et au plus haut degré intéressantes et dignes de foi. Le doute étant le premier pas vers la vérité, nous allons maintenant présenter des arguments tirés d'observations d'autres personnes méritant confiance, et, en dernier lieu, de nous-même.

Il est arrivé quelquefois que la Lumière Zodiacale fut remarquée tout à coup, après avoir été jusqu'alors complètement invisible, bien que l'état du ciel se montrât des plus favorables, les petites étoiles étant aisément distinguées. Nous citerons quelques observations de ce genre, faites par des savants tels que C. Piazzi Smyth, Alexandre de Humboldt, J. F. Jul. Schmidt, François Arago etc., dont personne ne récusera l'autorité.

On trouve l'observation du premier dans les *Transactions of the R. Soc. of Edinburg*" Vol. XX, Part. III, p. 489. Elle date du mois de Juin 1843 et fut faite dans l'Afrique méridionale. En voici la partie principale:

„On looking in the direction mentioned, the last portion of „the twilight was just visible, and forming a peculiarly level „line above the place where the sun had set . . . . All the „gorgeous colours . . . . had long since vanished and there only „remained sufficient light within the flattened arc described, „to make the space included between it and the horison appear „light blue, while all the rest of the sky attained a deeper „colour, *nay was almost black*, *and thickly spangled with small* „*as well as larg stars.*

„There *most decidely* was not then any symptom of the socal-„led „way of the twilight shooting upward".

„But as soon as the last illuminated portion of the western

---

de tout crépuscule possible. Du reste, Alex. de Humboldt cite des cas où la voûte céleste était totalement obscure trois quarts d'heure après le coucher du soleil (voir p. 232 de ce mémoire). Nous-même avons observé la disparition de tout crépuscule notable par un abaissement du soleil au-dessous de l'horizon de 13° 50′. Ainsi le chiffre de 16°, accepté par M. Geelmuyden et déduit d'une seule détermination de Lacaille en 1751 (Arago *Astr. pop.* III, 186), n'est point du tout certain, et varie probablement d'un jour à l'autre.

„sky had set, the phenomenon i. e. the Zodiacal light, appeared „in an unmistakeable manner, rising up in the ecliptic to a „height of 50°, with a breath of 12° at the horizon and forming „with the vast extent of its illuminated surface and the regula-„rity of its contour one of the most remarkable objets in the „starry sky . . . .

„Now, two circumstances worthy of notice, were pointed out „by this night observation, 1° that persons did not always know, „when to look for the Z. L. nor what sort of object to expect, „and 2° *that the theory* [1]) *was greatly in error and*, *for an „astronomical matter*, *grievously wrong*".

Comme on le voit dans ce récit, le fond du ciel était entièrement obscur, ou plutôt „noir", et parsemé d'étoiles grandes et petites, excepté un petit espace bien étroit, reposant sur l'horizon. En adoptant la manière de voir commune, il nous semble totalement impossible de comprendre comment ce faible reste du crépuscule empêcherait de discerner le corps lenticulaire près de l'écliptique et laisserait voir, en même temps, les petites étoiles, sur un fond noir. Il y a d'autant moins lieu d'accepter une telle explication, que la Pyramide Zodiacale s'est parfois montrée déjà visible quand le crépuscule était encore assez fort. Cette circonstance a été notée non seulement par Jones (Observations p. 134, 182, 206 etc.), mais, longtemps avant lui, en 1707, par Derham (De Mairan, *Traité de l'Aur. bor.* p. 221). „*Il „l'aperçut ainsi un quart d'h. seulement*, *ou environ*, *après le „coucher du soleil*, *c'est-à-dire au plus fort du crépuscule*".

Ainsi nous croyons que l'observation indubitable de M. Piazzi Smyth confirme celles de Jones, qui attribuent à la Lumière Zodicale une sorte de vitalité, ou de variabilité interne.

D'ailleurs Alex. de Humboldt fait dans son *Cosmos* (Trad. franç. par H. Faye, I, p. 155) la remarque suivante:

„Du 14 au 19 Mars, très régulièrement trois quarts d'heure

[1]) L'auteur a ici en vue la théorie qui attribue la Lumière Zodiacale à une matière environnant le soleil, sous la forme d'une atmosphère lenticulaire ou aplatie.

„après le coucher du soleil, il était impossible d'apercevoir la „moindre trace de la L. Z., *et pourtant l'obscurité était complète.* „Une heure après le coucher du soleil, elle paraissait tout à „coup avec un grand éclat entre Aldébaran et les Pléiades."

L'illustre savant dit aussi, dans une lettre au Directeur des „*Astronomische Nachrichten*", N°. 989: „Nous ne vîmes pas la „L. Z. le 20 et le 21 Mars 1803, quoique les nuits fussent „de la plus grande beauté." (La lune ne pouvait alors avoir aucune influence).

La même propriété capricieuse du phénomène semble être indiquée dans deux observations de M. Sophus Tromholdt (Heis *Zodiakall. Beobachtungen*, pag. 45), datées de Svanholmsminde (Danemark), 1872, le soir du 1er Février et du 2 Mars, ainsi à une époque très favorable de l'année:

1 *Févr. Ciel très clair. La L. Z. n'est pas très distincte.*

2 *Mars. Ciel clair. L. Z. faible. Le „Gegenschein"* (lueur opposée) *visible dans le Lion. Les limites ne peuvent pas être indiquées.*

Ces deux observations de M. Tromhold confirment celles de Jones (p. 337 et 339 de son ouvrage) où il trouve les limites de la Pyramide mal définies par un ciel serein.

Le caractère capricieux de la L. Z. ressort encore des observations suivantes de M. J. F. Jul. Schmidt, Directeur de l'obs. d'Athènes (*Das Zodiacallicht*):

a. „Bonn, 26 janv. 1849. Quoique l'air fût très favorable, la „L. Z. était très difficile à voir. De temps en temps elle sem„blait posséder une branche dirigée vers Pégase".

b. Bonn, 13 janv. 1850. La forme et l'intensité de la L. Z. „me parurent subir des variations réelles, quoique le ciel fût „très pur. Néanmoins, j'incline à les expliquer par de faibles „impuretés de l'air, qui toutefois ne suffisaient pas pour se „faire sentir dans la lumière des étoiles. Au commencement, à „5 h. ½, la lumière était très intense, mais sans limites discernables".

c. „1850, 5 Mars. La L. Z. très intense, jaunâtre et beau-

„coup plus lumineuse qu'aucune partie de la Voie Lactée; en „même temps, très mal limitée . . . .

On voit que cette propriété, tant de fois remarquée par Jones, est nettement confirmée par M. Schmidt. Des contours indécis indiquent, si l'ancienne hypothèse est admise, une cause interceptante dans l'atmosphère. Mais cette cause ne saurait s'accorder avec une intensité plus grande de la lumière. Nous verrons plus tard que nous-même avons observé des propriétés semblables de la Lumière Zodiacale.

d. „15 Mars. Ciel parfaitement serein (Nuit extraordinaire, „comme je n'en ai pas trouvé de plus belle en Italie, quant à „la transparence tout à fait exceptionnelle de l'air.) La L. Z., „qui était très intense et de couleur jaune, semblait à de courts „intervalles s'allonger et se raccourcir, tandis qu'en même temps „son intensité me paraissait variable."

Ici l'on voit les „pulsations" de Jones confirmées par M. Schmidt.

e. „22 janv. Air très pur. La L. Z. brille avec une intensité „très fortement variable à sa base."

f. 1853, 24 Oct. (Olmütz). Dans cette nuit complètement „sereine je vis la L. Z. distinctement et principalement à l'Est, „le soir, dans la constellation du Taureau et du Bélier. Elle „manquait totalement au Sud dans le méridien de γ de Pegase, „mais plus loin, vers l'Ouest, elle apparaissait de nouveau, „mais groupée en *nuages*, de telle sorte qu'une partie semblait „notablement inclinée vers l'écliptique... Le phénomène resta „pendant 5 heures sans changement. J'avais déjà remarqué ce „phénomène étrange quelquefois auparavant, et cela dans des „nuits claires de Septembre, du côté oriental du ciel.... toujours avant minuit".... [1]).

François Arago dit aussi, au sujet des changements d'éclat qu'on remarque dans la L. Z. (*Astronomie populaire*, II, p. 186): „La diaphanéité plus ou moins grande de l'atmosphère ne

---

[1]) Pour la description plus détaillée, voir l'ouvrage cité de M. Schmidt, p. 44.

„semblerait pouvoir expliquer qu'une partie de l'effet enregistré „par des astronomes habiles."

Ensuite, pag. 193, le même auteur cite sa propre observation du 28 Mars 1843, où la L. Z. se montra en présence de la grande comète de cette année:

„La Lumière Zodiacale nous a paru sujette à des changements „brusques d'intensité. Y a-t-il là une illusion dépendante d'un changement dans la diaphanéité de l'atmosphère? *De pareilles intermittences ne se remarquaient pas dans la queue de la comète.*"

Nous voudrions fixer l'attention de tous ceux qui s'intéressent à notre sujet sur ce dernier fait important, parce que quelques-uns ont voulu expliquer les changements d'éclat des queues cométaires, observés si souvent, précisément par des variations périodiques dans la transparence de l'air.

L'observation d'Arago nous semble prouver qu'on ne peut expliquer par la diaphanéité de l'atmosphère les changements d'éclat de la L. Z. Car, si l'on accepte cette cause pour ce phénomène, pourquoi la queue de la comète de 1843 n'en fut-elle pas affectée?

Nous rapporterons encore les paroles suivantes du savant astronome, qu'on trouve p. 195 de l'ouvrage cité:

„Mon ami Alexandre de Humboldt a vu souvent dans les „régions tropicales de l'Amérique du Sud, des intermittences „d'intensité brusques et rapides, des ondulations qui traversaient „la pyramide lumineuse. Des variations supposées dans la con„stitution de notre atmosphère ne sauraient suffire à rendre „compte des changements que subissent la configuration et l'in„tensité de la Lumière Zodiacale."

Quoique ces paroles n'expriment qu'une simple opinion, sans arguments à l'appui, les passages cités confirment en général les observations de Jones, en tant qu'elles accusent un caractère variable, interne, de la Lumière Zodiacale, caractère qui n'est pas conciliable avec l'explication ancienne et commune du phénomène.

Le célèbre Cassini (*Mémoires de l'Académie Royale*, VIII, p.

163, 164) remarque, à l'occasion de ce caractère variable de la L. Z.: „Etant assez évident par les différences accidentelles „qu'elle fait paraître d'un jour à l'autre, qu'elle reçoit des „variations réelles, outre celles qui viennent des causes externes, „comme des divers degrés de la clarté de l'air et du concours „de la lumière des astres, et même de la disposition des yeux „de l'observateur."

En outre, on trouve dans l'ouvrage de Jones le passage suivant, tiré d'un rapport traitant des observations faites par M. Birt (1852): „*One evening, there was à sudden brightening of „the light for an instant, and also variations of its lustre of an „intermittent character. These intermissions of brightness were „observed on the same evening by* Mr. Lowe, *of Nottingham. „They are described by the author not to be of the nature of „pulsations, in the usual acceptation of the term, but to consist „of alternate brightenings and dimmings of the entire mass of „light, such as might be produced by the approach and recess „of a luminous body.*" (*Am. Journ. Sc.* XV, *new series*, *p.* 121).

Enfin M. Arcimis, de Cadix, (*Naturforscher*, 1876, p. 29) dit: „Parfois j'ai remarqué une sorte de lueur dans l'Orient (le „soir), qui n'était pas occasionnée par le crépuscule, car elle „se montrait 3 à 4 h. après le coucher du soleil. Sa forme était „celle d'une lance et sa couleur était blanchâtre.

„La L. Z. m'a souvent offert dans toute son étendue un „mouvement vibratoire; mais je n'oserais affirmer que cela ne „provînt pas d'une faiblesse de mes yeux, car, en d'autres occa„sions, elle présente un éclat tranquille, qui imprime un caractère „mystérieux au phénomène".

Nous croyons avoir démontré, par toutes ces citations, que les observations de Jones sont confirmées sous plusieurs rapports par celles d'autres savants authentiques. Si elles n'ont pu être contrôlées de la même manière dans toutes leurs parties, c'est par la simple raison qu'il n'existe point, sur ce sujet, de série d'observations également complète.

Ainsi, pour pousser plus loin le contrôle des résultats de Jones,

il est nécessaire d'examiner la nature elle-même. Quoique nous ne fussions pas placé en d'aussi bonnes conditions, quant au lieu d'observation, que le pasteur américain, qui a eu le bonheur de contempler les cieux étoilés en pleine mer et sous des latitudes différentes, nous avons fait de notre mieux pour contribuer quelque peu à élucider la question.

III. Nos propres observations sur la Lumière Zodiacale.

§ 19. *α.* Observation ayant rapport à la composition de la Pyramide Zodiacale: [1])

Le 22 Févr. 1875, à 7¼ h. du soir, le phénomène brillait d'un éclat extraordinaire. Vu d'un point abrité de lumière étrangère, il sautait littéralement aux yeux. La partie la plus éclairée de la Pyramide se trouvait à son pied et avait un éclat plus grand que les parties de la Voie Lactée entre Cassiopée et le Cygne, quoiqu'elle fût plus basse. Il ne nous a pas été possible de distinguer la Lumière Centrale de la L. diffuse. Toutefois nous avons très distinctement noté la présence d'une partie beaucoup plus subtile, descendant de la pointe de la Pyramide principale, comme un manteau déployé vers le nord. Son contour était très mal défini; mais on reconnaissait parfaitement qu'il formait une courbe ayant sa convexité vers l'horizon. Sans doute nous avous constaté dans cette observation la présence de la „Lumière pâle" de Jones.

β. Le 23 Févr., de 7 à 8 h. du soir, le Cône central de la Lumière Zodiacale se montra entouré du Cône diffus.

Les limites du premier étaient si bien définies, qu'on aurait pu indiquer les étoiles situées en dedans ou en dehors, si ces étoiles n'avaient été masquées par la lumière trop vive de cette partie brillante. Le sommet du Cône central se trouvait

[1]) Quant à nos observations *α*, *β*, *γ* et *ε*, voir le *Wochenschrift f. Astr.* etc. de Hermann J. Klein, Année 1874, p. 399, et 1875, p. 86 et 87; les autres n'avaient pas encore été publiées jusqu'ici.

près de l'étoile ξ des Poissons. La Lumière pâle était aussi très bien visible.

γ. Cette observation se rapporte à l'apparition d'une Pyramide toute nouvelle, mentionnée pag. 222 de ce Mémoire, comme conséquence d'une „*phase*" extraordinaire de la Lumière Zodiacale.

Le 1er Déc. 1874, à 10 h. 15m du soir, placé dans une position favorable, sous un ciel parfaitement clair, nous vîmes à l'Ouest une pyramide lumineuse reposant par sa large base sur l'horizon, exactement comme cela aurait dû arriver environ une heure après le coucher du soleil, quoique celui-ci fût alors éloigné de plus de 80 degrés de la pyramide, c'est-à-dire d'une quantité supérieure à la longueur moyenne de la pyramide ordinaire. La pointe très effilée de cette pyramide „nouvelle", que nous pouvions observer de différentes positions, se terminait dans le voisinage du Taureau, ou environ à 180° du soleil.

Peut-on continuer, en présence d'un tel fait, à déclarer, comme cela a été fait récemment, p. e. par M. Geelmuyden dans son écrit mentionné ci-dessus, que la Pyramide Zodiacale participe au mouvement diurne?

Notre observation γ) est en pleine concordance avec celles de Jones, pag. 188, 190, 192, 196, 198, 200, 524 et 526 de son ouvrage, en ce qui regarde la présence d'une Pyramide Zodiacale dans l'Ouest à une heure avancée de la nuit. Elle prouve aussi, d'une manière évidente, que de temps en temps la Lumière Zodiacale subit des „phases" en longueur extrêmement grandes, non explicables par les variations de l'obscurité.

δ. Dans les observations qui viennent d'être citées, Jones constata en outre la présence d'un Cône oriental vers minuit, ou du moins de bon matin. On trouve aussi des cas où le Cône oriental se présenta seul (p. 54, 64, 70, 84, 154, 162, etc.)

Il nous a été donné d'observer chose semblable dans une des nuits froides, mais excessivement claires, de l'hiver de 1879.

Le 16 Déc. de cette année, à 5 h. du matin, nous vîmes la Lumière Zodiacale orientale s'étendre jusqu'aux étoiles β ϑ ι du Grand Lion, qui ont une longitude moyenne de 166°. La limite

boréale se trouvait un peu plus haut que les étoiles du quadrilatère $\delta\, \nu\, \psi\, \zeta$ de la Vierge, et la limite australe passait par α de la même constellation. La lumière était extrêmement faible, mais indubitable, tandis qu'à 5 h. moins 20 minutes nous n'en avions encore rien pu distinguer dans la partie indiquée du firmament, le contour de la L. Z. coupant alors l'écliptique à une longitude de 210°. Comme le soleil, à cette date, avait une longitude d'environ 264°, on trouve que dans ce cas l'élongation du sommet de la Pyramide du matin atteignait 98 degrés.

Cette observation confirme les résultats de Jones, indiquant que la L. Z. du matin commence déjà de très bonne heure et fort haut dans le ciel, d'une manière très faible, mais indubitable; ainsi il n'y a plus lieu de dire que cette lumière se lève avec le soleil, ou que, se levant avant lui, elle précède simplement l'astre du jour. Car ce n'est pas en vingt minutes que le sommet pourrait parcourir un chemin de $210° - 166° = 44°$ dans l'écliptique, en vertu du mouvement diurne. De même, le crépuscule croissant ne peut jamais faire *allonger* la Pyramide Zodiacale. Notre observation prouve donc, aussi bien que tant d'autres de Jones, que la L. Z. du matin *naît* dans quelque partie du ciel. C'est de la même façon que cet observateur la voyait *s'éteindre* le soir dans la partie occidentale de la voûte céleste, et qu'il voyait se dissoudre la Lumière Centrale dans la Lumière Diffuse (p. 144, 178, 182, 186, 192, 196, 248, 282, 376, 380, 458, 528).

Ajoutons que, selon M. Goldschmidt, on observa à Paris, le 19 janvier 1850, à 12½ h., la L. Z. jusqu'à 130° du soleil. Le phénomène passait par les étoiles φ, γ, η et β de la Vierge (Heis, *Zodiakall. Beob.*, p. 24).

ϵ. Observation relative à l'illumination de l'écliptique en anneau, phénomène observé par Jones à Quito (Gould, *American Journal* N°. 100, d'après l'indication de M. Schiaparelli).

Le 2 Déc. 1874, à 10 h. 15^{m}, nous vîmes un anneau lumineux qui, partant de la Pyramide décrite ci-dessus dans l'observation γ, et passant à travers les étoiles du Verseau, dans le

voisinage de α de cette constellation, du côté méridional de l'arc α γ de Pégase, à travers le Bélier et les Hyades, s'étendait jusqu'à la Voie Lactée, un peu au sud de ζ du Taureau.

Cet anneau n'avait que quelques degrés de largeur et ses limites étaient mal définies. L'apparition ne dura que peu de minutes. A l'autre côté de la Voie Lactée, on ne pouvait distinguer rien de semblable.

Hâtons-nous de dire qu'un pareil phénomène fut observé par M. Heis en 1831, par M. Schiaparelli en 1862, par M. Eylert en 1873 et par M. Serpieri également en 1873 (Heis, *Zodiakallicht-Beobachtungen*, pag. VI de l'Introduction).

Lors de notre observation, le soleil avait une longitude de 250° et l'étoile ζ du Taureau en avait une de 82°. Ainsi le point terminal de l'anneau possédait une élongation orientale de 168°.

ζ. Parmi les observations de Jones, quelques-unes nous avaient frappé par un trait extraordinaire, à savoir, que la Lumière Zodiacale se voyait très distinctement malgré la présence d'un brouillard plus ou moins fort. Telles sont les observations suivantes:

Pag. 304: *Bonne observation; brouillard dans l'atmosphère le jour et la nuit.*

Pag. 306: *Brouillard constant; L. Z. complètement distincte; limites incertaines.*

Pag. 312: *Ciel brumeux comme à l'ordinaire. Limites impossibles à déterminer jusqu'à* 9 *h.* 15 *m. La Lumière Zodiacale elle-même fut très marquée et assez forte jusqu'à* 16° *du Cancer.* [1]).

Il nous avait paru extrêmement étrange, en lisant ces passages, qu'une apparition aussi sensible et aussi faible que la L. Z. n'eût pas été facilement effacée, même par le brouillard le plus léger. Heureusement nous avons eu l'occasion de pouvoir comparer nous-même l'influence d'un tel état brumeux du ciel sur la Pyramide Zodiacale et sur la Voie Lactée.

---

[1]) Les numéros donnés aux étoiles ont rapport à un certain globe céleste.

30 Janv. 1880, 6 h. 50 m. La L. Z. avait été visible depuis 6 h. 15 m., ayant commencé, en même temps que la Voie Lactée, par la Lumière Diffuse seule. Un brouillard s'étend sur la terre, *mais le bord inférieur de la Pyramide est beaucoup plus distinct que les parties de la Voie Lactée au pied de la croix du Cygne, qui sont effacées presque totalement, quoique placées à la même élévation. Or ce sont justement ces parties qui sont indiquées dans l'Atlas Céleste de* Heis *comme d'éclat supérieur.*

7^h 5. Le brouillard augmente toujours. L'horizon terrestre en est tout à fait couvert. *Néanmoins, la Pyramide Zodiacale a toujours son plus grand éclat à son bord inférieur. Cet éclat ne nous semble que très peu affaibli par la présence du brouillard.* Le sommet de la Pyramide se trouve depuis 6^h 40^m près des Pléiades et de la planète Mars. Quoique la lumière du phénomène à cette grande élongation (plus de 100°) soit assez faible, l'observation ne donne lieu à aucun doute.

Ce fait ne peut guère, à notre avis, s'expliquer que de l'une des deux manières suivantes: ou bien, 1°. la lumière de la Pyramide Zodiacale possède la propriété de ne subir que peu d'absorption par l'action des brouillards légers; ou bien, 2°. on ne doit pas chercher l'origine du phénomène en dehors de notre atmosphère elle-même. Dans ce dernier cas, le brouillard pourrait favoriser, jusqu'à un certain degré, le développement de la Lumière Zodiacale, tout en effaçant les parties les plus brillantes de la Voie Lactée.

La première supposition semble contredite par la circonstance que les contours de la Pyramide étaient très mal définis, selon les observations de Jones comme selon la nôtre, circonstance qui s'expliquerait, dans la deuxième supposition, par une dispersion inégale de la matière adjuvante du brouillard, ou simplement par cet effet connu de perspective, en vertu duquel les nuages éloignés nous apparaissent avec des contours plus distincts que ceux qui, dans les pays montagneux, par exemple, nous environnent de près.

Reste à remarquer que le bouillard observé avait tous les

caractères des brouillards ordinaires, c'est-à-dire qu'il était de nature aqueuse [1]).

η. Cette observation se range parmi celles qui attribuent à la Lumière Zodiacale un caractère capricieux, s'exprimant par des variations irrégulières, ainsi qu'on l'a déjà vu en différents cas, mentionnés ci-dessus. Le même soir où nous faisions l'observation *ζ*, à $6^h 30^m$, il se produisit une interruption dans la continuité de la Pyramide Zodiacale, entre les planètes Jupiter et Saturne. On aurait pu penser qu'un nuage de forme irrégulière venait de se projeter sur la Pyramide, si les petites étoiles n'étaient restées pleinement visibles à travers la L. Z., circonstance sur laquelle nous fixâmes immédiatement toute notre attention. Il est vrai qu'on doit être très prudent en pareil cas, et ne pas admettre trop vite l'absence de toute illusion optique. Nous avons remarqué, en effet, que lorsque l'œil, après avoir fixé pendant quelques moments le bord du papier à notes (papier très faiblement éclairé par la lumière des astres), était dirigé ensuite vers le fond du ciel, il laissait apercevoir l'image négative, c'est-à-dire sombre, de ce bord; dans le cas actuel, toutefois, nous ne croyons pas avoir été trompé par une semblable illusion, la forme de l'interruption observée étant très irrégulière, tandis que l'image négative du bord du papier était limitée par une ligne droite.

Mais, en admettant la réalité du phénomène, on ne peut l'expliquer que par un changement temporaire dans la matière zodiacale elle-même, changement qui nous semble inconciliable avec la théorie planétaire de la Lumière Zodiacale.

---

[1]) Il nous paraît très intéressant que cette propriété singulière de la L. Z., d'être plus facilement visible quand l'air est chargé d'un certain brouillard léger (*quando vi è nell'aria un non so que di brumoso*), ait aussi été remarquée, par M. Schiaparelli, dans le phénomène du „*Gegenschein*". C'est dans une lettre à M. Serpieri, que M. Schiaparelli a communiqué cette remarque (Serpieri, p. 86), qui révèle une ressemblance nouvelle entre ce phénomène étrange et la Pyramide Zodiacale. M. Serpieri assure avoir plus d'une fois observé la même chose.

Notons enfin que, dans cette observation, la couleur de la Pyramide, sans être décidément jaune, n'était pas aussi bleue que celle de la Voie Lactée.

ϑ) Nous présenterons encore une de nos observations, dont la comparaison avec la précédente nous paraît avoir quelque intérêt. La voici, extraite de notre journal.

4 Févr. 1880, $7^h\,40^m$ du soir. La Lumière Zodiacale est beaucoup plus faible que le 30 janvier passé. Son éclat maximum est moins grand que celui des parties de la Voie Lactée au-dessus de Deneb. (Ces parties ne sont que de deuxième ordre, quant à leur pouvoir lumineux) . . . .

7^h 45. La Lumière Zodiacale s'est encore affaiblie. Elle est dissoute. Les limites sont comme devenues plus confuses et mal déterminables. L'horizon est brumeux . . . .

8 h. La Pyramide Zodiacale est encore plus faible. Pourtant, le ciel est bien clair. La Voie Lactée, au-dessus du Cygne, donc assez près de l'horizon, laisse discerner toutes ses particularités, p. e. la bande transversale et obscure au-dessus de Deneb. La nébuleuse d'Andromède et l'amas de Persée se distinguent sans peine. Nous avouons que les parties basses de la Voie Lactée sont obscurcies par le brouillard qui occupe les couches inférieures de l'atmosphère, mais cette cause ne saurait expliquer la faiblesse extrême des parties de la L. Z. qui sont situées dans le ciel clair et serein.

8 h. 5. Les limites de la Pyramide restent indéterminables, quoique, dans son axe, δ ϵ ζ des Poissons (de 4me et 5me gr.) soient discernables, circonstance qui prouve que l'état de l'atmosphère ne cause pas l'apparence mal définie des côtés.

8 h. 15. Les limites se sont affaiblies de nouveau. La Pyramide entière semble s'éteindre. La Voie Lactée est restée distincte comme auparavant . . . .

Cette observation prouve que la L. Z. subit quelquefois des changements réels, inattendus, aussi bien dans le cours d'une même nuit que d'un jour à l'autre; changements inexplicables par sa position relativement à l'horizon. Si l'on compare cette

observation à la précédente, on verra que, à cette date, le phénomène aurait dû apparaître encore plus facilement, vu que son axe faisait un angle plus grand avec l'horizon. Aussi cet axe ne se montrait nullement devié de sa position parmi les étoiles.

Des faits plus ou moins analogues sont mentionnés dans les observations, ci-dessus citées, de Cassini, d'Arago, de Humboldt, de Schmidt; mais nous indiquerons surtout, comme touchant de plus près à notre sujet, les pages 447 et 473 de l'ouvrage de Jones, où l'on rencontre des observations semblables à la nôtre, et qui par conséquent en reçoivent une confirmation. Le même caractère se retrouve encore dans les observations que Jones a consignées aux p. 145, 179, 183, 187, 193, 197, 283, 377, 381, 459 et 529, observations où il nota un affaiblissement de la Lumière Centrale, se produisant même quand cette lumière s'élevait, et souvent accompagné d'un renforcement de la Lumière Diffuse.

Ajoutons que nous n'avons remarqué ces analogies qu'après avoir enregistré notre propre observation.

ι) Le 27 Févr. 1880, à 7 h. du soir, la limite australe du Cône Zodiacal rasait au sud la planète Saturne et s'étendait, suivant un grand cercle de la sphère céleste, vers le milieu de l'arc Mars-Aldébaran; quant à la limite boréale, *qui*, *en comparaison avec les nuits précédentes*, *s'était beaucoup reculée vers le nord*, elle était si confuse et si mal définie, que nous ne pûmes en fixer la position. Néanmoins il y avait une zone sombre du côté gauche de la Voie Lactée, prouvant que vers le nord la Lumière Zodiacale ne s'étendait pas jusque-là. Aucune raison n'existait d'ailleurs pour désigner la partie décrite du phénomène par le nom, mentionné ci-dessus, de „Lumière Pâle". Evidemment, nous avions rencontré ici un de ces déplacements latéraux de la Lumière Zodiacale, qu'on trouve décrits dans l'ouvrage de Jones (p. 184, déplacement de la limite boréale; p. 402, déplacement de la Pyramide centrale seule; p. 476, 506, 508, 538 etc.)

κ) Enfin, d'une manière générale, nous avons souvent observé

que le sommet de la Pyramide Zodiacale se mouvait, le soir, dans le sens indiqué par Jones et Serpieri, en s'éloignant du soleil. Ces „phases" nous ont paru quelquefois subites; mais nous ne voulons rien affirmer à cet égard. Pour citer un exemple: Le 30 janvier 1880, les premières traces du phénomène se présentaient à 6 h. 15 m., le crépuscule étant encore visible.

A 6 h. 20 la Lumière diffuse dépassait la planète Saturne, c'est-à-dire que son sommet avait alors une longitude astronomique de 12°.

A 6 h. 40 la Pyramide s'étendait, sans aucun doute, jusqu'aux Pléiades, qui se trouvent à 60° de longitude. Nous ne voulons pas dire que cette „phase" se soit produite d'un seul coup, car on ne peut diriger ses yeux partout à la fois, mais nous nous rappelons très bien que ce grand déplacement, en 20 minutes, nous surprit vivement.

Il faut bien remarquer que cette „phase" avait lieu après la fin définitive du crépuscule, dont les dernières traces avaient abandonné complètement l'horizon à 6 h. 20.

Après 6 h. 40, le sommet ne montra plus de mouvement distinct jusqu'à 7 h. 15, instant où nous dûmes cesser notre observation. Nous n'avons pas reconnu que la pointe dépassât les Pléiades, mais nous avons noté dans notre journal qu'aucun allongement du phénomène ne s'apercevait au-delà de la Voie Lactée, dans la direction des Gémeaux et du Cancer.

IV. Suite de l'examen et de la critique du Traité de M. Serpieri.

§ 20. Après avoir constaté dans son VIIme chapitre que, d'après les observations de Jones, le cône zodiacal présente les mêmes apparences le matin et le soir, aux heures équidistantes du moment où le soleil se lève ou se couche (voir la loi *r* de Serpieri, p. 39), l'auteur déduit de ces mêmes observations (chapitre VIII), après un examen approfondi et à l'aide de tables

tirées des données de Jones (tables où il compare les élongations du matin à celles du soir, mesurées chaque fois dans une même nuit), que les élongations du sommet de la Pyramide sont plus grandes le matin que le soir. Le même résultat découle des observations générales de Jones, qui ne se rapportent pas à une même nuit. Il est remarquable que MM. Heis et Weber, observant en des lieux très voisins l'un de l'autre, trouvent, en Europe, un résultat contraire à celui de Jones. Pour eux, la Pyramide du matin est, en moyenne, un peu plus courte que celle du soir. Il serait bien intéressant de savoir si une telle discordance locale se montre aussi ailleurs. Malheureusement nous ne possédons point d'autres observations qui puissent élucider la question. Schmidt ne déterminait que la longueur de la Pyramide du soir.

On pourrait être tenté de voir, dans le résultat mentionné, la conséquence d'un changement d'inclinaison de l'écliptique par rapport à l'horizon. Mais, en consultant les tables de M. Serpieri, qui a ajouté à chaque comparaison la latitude moyenne du zénith pendant l'observation du soir et du matin, nous devons convenir qu'il n'y a aucune raison d'attribuer une telle influence à la position de l'écliptique. Parfois, l'écliptique étant presque perpendiculaire à l'horizon, la Pyramide du matin demeure constamment plus longue que celle du soir; d'autres fois, l'angle entre ces deux grands cercles de la sphère étant plus petit le matin que le soir, la Pyramide du matin n'en reste pas moins plus longue que celle du soir. Dans d'autres cas, la position de l'écliptique se montre indifférente, ou bien son influence semble osciller entre l'un et l'autre côté.

§ 21. Dans le IXme chapitre, M. Serpieri déduit les lois *t* et *u*, d'une table qui contient „les valeurs moyennes des élongations „de la Lumière Zodiacale, tant Centrale que Diffuse, se rapportant „à différentes dates d'observation." Voici ces deux lois et le passage qui les précède (p. 50):

„L'examen attentif, fait sur les plus grands mouvements des „élongations moyennes du soir et du matin, nous fait découvrir un caractère tout nouveau du phénomène, qui ne paraît

„pas avoir été soupçonné jusqu'ici. On savait, en effet, que „dans les pays tropicaux la L. Z. est plus splendide et plus „belle qu'ailleurs, et, justement pour cela, chacun devait penser „que là aussi se trouvaient les élongations les plus grandes. „Quant à l'influence des différentes inclinaisons par rapport à „l'horizon, on devait présumer que le phénomène serait plus „pauvre et plus faible dans le voisinage de l'horizon. Cette opinion „décidée et générale n'est pas, je crois, le résultat d'observations „positives, mais bien la conséquence nécessaire de l'idée qu'on „s'est formée de la nature de la L. Z. En effet, en admettant „que cette lumière soit extra-terrestre et très éloignée, formée „de matière cométaire ou de poussière d'aérolithes extrêmement „raréfiée, il était naturel de penser que la transparence plus „grande du ciel tropical et des couches supérieures devait beau-„coup favoriser la perception et rendre visible la partie plus faible. „Mais il n'en est pas ainsi. Je ne prétends point que la pureté „de l'air ne contribue en rien à la visibilité du phénomène et „qu'elle ne le fasse apparaître sur une plus grande étendue, „comme cela est peut-être indiqué par quelques petites oscilla-„tions, notées par Jones; mais, à part cette influence très secon-„daire, je dis que la pureté de l'air n'a rien à faire avec les „variations plus grandes et plus marquées qui se déduisent des „observations de Jones; en d'autres termes: le phénomène pos-„sède en lui-même des causes fort puissantes de grand ou de petit „développement, causes qui ne correspondent pas et ne sont pas „proportionnelles aux conditions différentes de la transparence „atmosphérique. Tout cela se déduit très clairement de notre „analyse. Nous posons donc les théorèmes suivants, qui ont force „de lois":

t) „Les grandes périodes de la courbe annuelle des élongations „du matin et du soir ne sont pas causées par les positions spéci-„ales de l'observateur relativement à l'équateur ou à l'écliptique, „ni ne pourraient en être déduites à l'aide des conditions variables „de la transparence atmosphérique; mais elles exigent une cause „interne et assez forte, qui domine et surmonte ces influences

„atmosphériques et qui soit assujettie à de grandes variations „constantes, d'une durée de plusieurs mois."

u) „Aux grandes variations mensuelles de la Lumière Centrale „correspondent des variations égales et encore plus vives de la „Lumière Diffuse, aussi bien le soir que le matin. Ainsi, la „cause primitive ou génératrice du phénomène domine et gouverne „également toutes ses parties."

§ 22. Le Xme chapitre de M. Serpieri nous donne la démonstration de la loi suivante:

v) „Il y a une grande harmonie entre les grandes variations „mensuelles des élongations moyennes du soir et du matin. En „d'autres termes, aux époques, ou pour les lieux, où la Lumière „Zodiacale s'agrandit ou se raccourcit plus le soir que le matin, „à ces mêmes époques, ou pour ces mêmes lieux, elle montre „également une tendance à se développer le matin en maxima „ou en minima".

§ 23. Une autre conséquence de l'analyse faite par M. Serpieri est l'existence d'une période sémestrale pour les élongations moyennes du sommet de la Lumière Zodiacale, avec des maxima en Décembre—Janvier et en Juin—Juillet. La même période se laisse retrouver dans les observations de Heis et de Weber, faites en Europe.

Ici nous rencontrons une nouvelle preuve en faveur de la véracité des observations de Jones, qui n'avait même pas songé à une telle propriété du phénomène, pour l'étude duquel il s'est donné tant de peines.

Il est presque superflu de remarquer qu'on essayerait en vain de retrouver cette période sémestrale dans les développements purements théoriques de M. Geelmuyden, quoique ce savant déduise de ses données une période annuelle de meilleure visibilité du phénomène, aussi bien pour le soir que pour le matin. Evidemment, la cause de cette circonstance est tout simplement que M. Geelmuyden admet une élongation constante du sommet de la Pyramide Zodiacale (70°), ce qui empêche naturellement de trouver une variation théorique de cette élongation.

§ 24. Les chapitres XI et XII traitent d'une propriété extrêmement intéressante du phénomène qui nous occupe, propriété découverte et énoncée pour la première fois, autant que nous sachions, par Jones (p. XXX de l'Introduction de ses „*Observations*") et par Serpieri (les chapitres mentionnés). Cette propriété, pleinement confirmée par les observations de Heis, de Weber, de Schmidt et d'autres, consiste en ce que la plus grande partie de la Pyramide Zodiacale se trouve du même côté de l'écliptique que l'observateur. Les observations de Jones démontrent cette loi d'une manière extrêmement frappante, de sorte qu'elle saute aux yeux dans le tracé graphique (Pl. I de Serpieri), où les positions des côtés et du sommet de la Pyramide, de même que la latitude de l'observateur, sont exprimées par des courbes. Pour éviter les figures, nous donnons ci-dessous les résultats que M. Serpieri communique p. 59 de son traité, en nous bornant aux éléments du sommet et du point de l'axe situé à 40° au-dessous du sommet.

Observations du soir.

Lumière Centrale.

Années.	Latitude moyenne du sommet.	Latitude moyenne de l'axe à 40° sous le sommet.	Latitude géographique de l'observateur.
1853, 1854, 123 observations complètes	1°,8 N	3,8 N	N
1855 Janv., Févr. et Mars, 23 obs. compl. .	1°,7 S	2,55 S	S
Lumière Diffuse.			
1853, 1854, 127 obs. compl.	3°,3 N	4,3 N	N
1855 Janv., Févr. et Mars, 18 obs. compl. .	3°,1 S	3,25 S	S

Observations du matin.

Lumière Centrale.

Années.	Latitude moyenne du sommet.	Latitude moyenne de l'axe à 40° sous le sommet.	Latitude géographique de l'observateur.
1853, 1854, 112 obs. compl.	0°,4 N	3°,2 N	N
1855, Janv., Févr. et Mars, 18 obs. compl. .	1°,0 N	0°,05 N	S

Lumière Diffuse.

Années.	Latitude moyenne du sommet.	Latitude moyenne de l'axe à 40° sous le sommet.	Latitude géographique de l'observateur.
1853, 1854, 105 obs. compl.	0°,2 S	3°,1 N	N
1855 Janv., Févr. et Mars, 4 obs. compl. . .	5°,0 S	0°,75 N	S

Nous avons trouvé ces résultats exacts. Seulement, au lieu de 18 cas, nous n'en avons compté que 7, appartenant aux numéros 282, 284, 286, 287, 288, 298 et 299 de Jones, où l'observation pouvait être dite *complète* pour la Lumière Centrale du matin. Cependant ces 7 cas nous donnent 1°,5 N pour le sommet, de sorte que le résultat général n'en est pas modifié.

§ 25. Cette propriété du phénomène, de n'avoir point de parallaxe, doit mettre dans le plus grand embarras les défenseurs de la théorie planétaire (celle de Fatio de Duillier), d'autant plus que tous les observateurs sont d'accord en ce qui regarde l'existence de la susdite propriété. Il n'y a pas le moindre doute que l'observateur placé au nord de l'écliptique ne voie en général dévier la Pyramide Zodiacale vers le même côté de l'écliptique céleste. De même, l'observateur qui se trouve au sud de l'écliptique céleste voit cette Pyramide s'incliner plus vers

le côté austral de ce plan, contrairement à ce qu'on devrait attendre d'un effet de parallaxe.

§ 26. Quoique les observations dans l'hémisphère austral, autres que celles de Jones, soient bien rares, elles sont d'accord avec la loi énoncée. M. le Prof. C. Piazzi Smyth, par exemple, a publié en 1848, dans les *Transactions o. t. R. Soc. of Edinb.* (Vol. XX, Part. III, p. 489), quelques déterminations de la position du sommet de la L. Z. par rapport à l'équateur céleste, accompagnées d'un très beau dessin de la Pyramide. Les observations furent faites près de la ville du Cap, en Afrique, ainsi à une latitude d'environ 34° S. En réduisant ces observations, nous trouvons que cinq fois le sommet de la Pyramide était placé au sud et trois fois au nord de l'écliptique céleste. Il est bien dommage que nous ne connaissions pas les positions de l'axe de la Pyramide, car nous savons, par des observations boréales, que cet axe s'éloigne souvent beaucoup plus de l'écliptique que le sommet. Plus complète, à cet égard, est une détermination de M. Neumayer (Heis, *Zodiakall. Beob.*, p. 22 et 32), faite à Melbourne (37° 49′ de Latitude S). Il trouva que l'axe de la Pyramide possédait, en différents points, une latitude de — 5°, — 4°, — 2°½, — 1°½ et 0°, sur une longitude céleste de 250, 240, 230, 220 et 210°, tandis que la largeur maxima de la Pyramide s'élevait à 28°. Le 31 Juillet 1864, il détermina la position de l'axe à — ½°, — 1°, — 3°, — 4°½ de Lat., le 2 Août à — ¾°, — 1°, — 1°, — 1°, — 1°, pour le sommet et pour des points équidistants, de 10 en 10 degrés.

La loi susdite trouve encore une confirmation très concluante dans les observations de M. Eylert, communiquées par M. Heis (p. 47 de ses *Beob.*)

Voici quelques exemples de ces déterminations:

Latitude géographique.			Latitude céleste moyenne de l'axe de la Pyramide, pour sa longueur observée.
1)	25° 18′	N	+ 5°,4
2)	22 56	„	+ 5 ,8
3)	2 49	„	+ 2 ,95
4)	4 22	S	+ 4 ,13
5)	9 4	„	+ 6 ,7
6)	10 50	„ (Lum. Centr.)	+ 1 ,50
7)	35 15	„	— 4 ,81
8)	35 52	„	+ 4 ,67
9)	34 35	„	— 0 ,63
10)	34 35	„	— 2 ,08
11)	34 35	„ (Lum. centr.)	— 3 ,16
12)	5 46	„	— 1 ,25
13)	3 57	„	+ 2 ,57
14)	5 36	N	+ 2 ,94
15)	10 1	„	— 2 ,96
16)	34 24	„	+ 4 ,56
17)	35 14	„	+ 5 ,71
18)	43 48	„	+ 4 ,71

A l'exception de la 5me, 8me et 15me détermination, les 18 observations sont en général d'accord avec la loi mentionnée: *que la Lumière Zodiacale semble suivre l'observateur* quand il se déplace vers le N. ou vers le S. Cela ressortira immédiatement si l'on construit deux courbes correspondant aux deux séries de nombres données ci-dessus.

§ 27. On ne peut pas nier que ce caractère étrange ne soit très défavorable à l'hypothèse d'après laquelle chaque observateur verrait dans sa Pyramide le même phénomène extra-terrestre. C'est en vain qu'on chercherait à l'expliquer à l'aide du pouvoir absorbant des couches inférieures de l'atmosphère, comme le fait M. Geelmuyden dans le passage suivant:

„*Si l'axe ou la partie la plus claire* (de la pyramide), — *l'air étant supposé parfaitement transparent*, — *est dirigé le long de l'écliptique*, *cet axe doit se montrer réellement un peu élevé par*

rapport à ce plan, parce que les couches inférieures absorbent plus de lumière que les autres; et c'est justement ce qui arrive en général."

En admettant en partie cette explication, nous devons remarquer qu'elle ne suffit pas en ce qui regarde la déviation du sommet, lequel est situé trop haut dans le ciel et possède trop peu d'étendue pour subir un déplacement aussi grand par la cause susdite. Il nous semble probable que la différence, qui existe certainement entre l'absorption atmosphérique des deux flancs de la Pyramide, surtout quand celle-ci s'incline notablement vers l'horizon, n'a d'autre conséquence que d'effacer les parties plus faibles du phénomène, situées du côté vers lequel l'axe s'incline. Ainsi l'absorption atmosphérique pourrait être la cause de ce que la limite méridionale est généralement mieux déterminée que l'autre, pour un observateur de l'hémisphère boréal. Les observateurs de l'autre hémisphère se taisent presque toujours à cet égard. Si notre supposition est juste, ce serait la limite *boréale* de la Pyramide qui, pour eux, serait la plus précise. Nous ne trouvons mentionnée cette circonstance que par un seul observateur, savoir M. Neumayer (Heis, *Zodiakall. Beob.* p. 32), qui dit: „Dans „les années précédentes la L. Z. fut toujours observée à Mel„bourne environ à cette époque de l'année, en 1858 le 3 août, „en 1861 le 27 et le 31 juillet."

„*Toutes ces observations ont donné pour résultat qu'on ne peut „discerner la limite méridionale que très difficilement.*"

Or, nous le répétons, c'est là que s'arrête l'influence de l'absorption atmosphérique, qui ne peut affecter qu'insensiblement la position de la pointe. Les déviations de cette dernière, surtout dans les pays où l'écliptique est à peu près perpendiculaire à l'horizon, doivent avoir une autre cause.

Au surplus, il n'arrive pas *toujours* que, dans notre hémisphère, la limite australe se présente mieux déterminée que l'autre; c'est ce qui résulte p. e. d'une remarque de M. Heis (p. 23 de ses *Beobachtungen*) où il dit: „Du reste, *je ne vois cette année jamais bien précisée la limite méridionale.*"

En outre, on peut déduire des observations de Jones un argument concluant, qui renverse absolument l'explication de M. Geelmuyden. En effet, là où l'écliptique céleste paraît à peu près perpendiculaire à l'horizon, l'axe de la Pyramide, lorsqu'il se déplace vers le nord ou vers le sud, indique presque toujours que l'observateur se meut vers le même côté de l'équateur. Or cette position perpendiculaire ou presque perpendiculaire de la Pyramide Zodiacale exclut toute influence de l'absorption atmosphérique [1]).

§ 28. Jones a tâché en vain de ramener cette propriété singulière de la Lumière Zodiacale à un mode particulier de réflexion que les rayons du soleil éprouveraient sur les corpuscules de la matière zodiacale. L'examen le plus attentif des pages XIX—XXXII de son „Introduction", n'a pu nous faire comprendre comment l'auteur se représente la formation de la pointe de la Pyramide Zodiacale.

Bien qu'il soit facile de concevoir, dans les suppositions faites par l'auteur, que l'éclat de cette projection perspective diminue graduellement à mesure qu'on s'éloigne de la base, nous ne voyons pas pourquoi cette projection ne posséderait pas à peu près la même largeur sur toute son étendue. Evidemment, par exemple dans la figure de la p. XXVIII, chaque section radiale perpendiculaire au plan du dessin sera composée de corpuscules de l'anneau qui réfléchissent la lumière sensiblement sous le même angle vers le spectateur, et il n'y a aucune raison pour que ces sections se voient, du point d'observation, sous des grandeurs apparentes s'amoindrissant vers le zénith. C'est pour cela que nous rejetons l'hypothèse de Jones (*Observations*, p. XXVI), — énoncée indépendamment et défendue temporairement par Heis (*Zodiakall. Beob.*, p. VI), — que la Lumière Zodiacale serait simplement occasionnée par la réflexion de la lumière solaire sur un anneau entourant la terre. Ajoutons que cet anneau ne rend pas

[1]) Voir, pour les observations de Jones qui démontrent cette règle, le traité de Serpieri, p. 61.

compte, d'une manière aussi facile que Jones (p. XXIX) semble le croire, du „*Gegenschein*" des Allemands [1]). Cet anneau peut très bien expliquer une illumination de l'écliptique sur toute son étendue, mais non un maximum secondaire de clarté vis-àvis du soleil, aussi accentué que les faits nous le montrent. Du reste, il semble possible que le „*Gegenschein*" proprement dit, que nous observons quelquefois sous forme elliptique dans notre zone tempérée, se perde, pour un observateur des tropiques, dans l'anneau lumineux qui s'étend le long de l'écliptique.

Il est vrai, le „*Gegenschein*" elliptique a été vu, séparé et du côté nord de la Lumière Zodiacale annulaire, par M. Eylert (Heis, *Zodiakall. Beob.*, p. 49, 50) le 9 Déc. 1873, à une longitude de 29° 56′ O. de Greenwich et à une latitude de 20° 42′ N. [2]) Mais cela n'empêche pas que, pour un observateur placé près de l'équateur, ces deux lumières pourraient se confondre.

§ 29. Nous croyons pouvoir passer sous silence, quoique très intéressants, les chapitres XIII, XIV et XV, parce qu'ils traitent des changements accidentels dans le Cône Zodiacal et les „pulsations", phénomènes dont nous avons déjà parlé assez amplement plus haut.

Dans le XVIme chapitre, M. Serpieri s'occupe des changements de figure et des déplacements latéraux de la Pyramide, que Jones a décrits en différents endroits de son ouvrage et dont nous avons donné un exemple dans notre propre observation ι) (p. 244). Nous recommandons surtout l'étude de cette partie du mémoire de M. Serpieri à ceux qui croient, avec Cassini, à ce corps lenticulaire, dont l'existence serait prouvée par l'allongement des flancs de la Pyramide vers le soleil.

Il est incontestable qu'on trouve des cas où les limites du

[1]) M. Geelmuyden, à la fin de son traité, dit que Jones, „circonstance *assez remarquable*", ne mentionne pas le *Gegenschein*. Cela est inexact: Jones en parle au contraire amplement, pp. XIII, XXIX et 81 de ses „*Observations.*"

[2]) Il est très remarquable que, vers la même époque, presque à la même date (le 12 Déc.), M. Serpieri a vu la L. Z. annulaire à Urbino, dans le Taureau et le Verseau (Heis, *Zodiakall. Beob.* p. 51).

phénomène du matin s'accordent très bien avec celles du soir précédent, de manière à faire croire à l'existence d'un tel corps. Nous pourrions citer, entre autres, la figure qu'on voit p. 6 des *Zodiakallicht-Beobachtungen* de M. Heis et qui se rattache aux observations du 23—24 Déc. 1851. Mais, si l'on construit une figure semblable d'après l'observation du 11—12 Déc. 1852, ou celle du 2—3 Déc. 1853, on trouve beaucoup moins de connexité entre les limites.

Nous rencontrons encore une observation analogue de M. Eylert (p. 50 de l'ouvrage de M. Heis), faite le 20—21 Déc. 1873, en pleine mer, à une latitude moyenne de 30° 3',5. Les limites des deux Cônes du matin et du soir ne s'y accordent nullement. La lumière du soir ne possédait point de sommet et semblait passer au côté sud du soleil. Ainsi, ceux qui n'ont pas assez de confiance dans les observations de Jones pour se laisser guider par les conséquences que M. Serpieri en déduit et qu'il nous montre si clairement dans sa planche III, ne tarderont pas à être poussés dans la même voie par les résultats d'autres observateurs. Au contraire, quiconque regarde les observations de Jones comme l'expression fidèle de faits naturels, — et nous avons vu que cette manière de voir a beaucoup de fondement, — donnera son adhésion aux thèses *h*, *i*, *k*, *l*, p. 84 et 85 du traité de M. Serpieri.

§ 30. L'auteur consacre le chapitre XVII aux observations de Brorsen, de Schiapparelli, de Carlo Bruno, de Heis, deJones, de lui-même et de l'auteur de ce mémoire sur le phénomène du „*Gegenschein*". Il donne aussi une description des observations spectroscopiques que Wright, Liais, Angström, Respighi, Lockeyer et Arcimis ont faites sur la lumière de la Pyramide Zodiacale. Nous y reviendrons plus loin.

§ 31. Dans le XVIIIme chapitre, l'auteur s'occupe d'une recherche sur la parallaxe du Cône Zodiacal, vu de divers points de la terre à la fois. Il donne un ensemble de 13 observations de Heis et de Jones, qu'il nomme: „*contemporane lontane*". Or il faut bien remarquer que ces observations, dites simultanées, ont eu lieu avec une différence de temps de 5 à 13 heures. Néan-

moins, la comparaison de ces déterminations est très intéressante, et il en est de même des remarques de l'auteur sur la circonstance étrange que deux observateurs, placés si près l'un de l'autre que MM. Heis et Weber, — la distance des deux lieux, Munster et Peckeloh, étant seulement de quelques milles, — voyaient souvent le phénomène sous des aspects très différents. Cette circonstance nous avait déjà beaucoup étonné nous-même, d'autant plus qu'elle ne pourrait être expliquée aisément par des causes personnelles ou locales. Du reste, en pareille matière il faut user de la plus grande prudence, car il est très difficile de décider jusqu'à quel point les meilleurs yeux doivent nécessairement voir la même chose absolument de la même manière.

§ 32. C'est bien dommage que nous ne possédions point, parmi les observations de M. Piazzi Smyth, près de la ville du Cap (1843—45), et de M. Schmidt, à Athènes, — celles de M. Heis ne commençant qu'en 1847, — des déterminations réellement simultanées du sommet et des flancs de la Pyramide Zodiacale. Cependant, pour nous, la question semble déjà tranchée par la loi anti-parallactique de Jones et Serpieri, développée ci-dessus et confirmée par presque tous les observateurs de cet attrayant phénomène.

V. Conclusions préliminaires déduites des raisonnements précédents.

§ 33. Nous allons maintenant récapituler les faits acquis et en tirer des conclusions à l'égard de la question qui nous occupe. Voici les divers points que nous croyons avoir démontrés, ou que nous avons prouvé être vraisemblables.

1°. *Les observations de Jones possèdent en elles-mêmes tous les caractères de véracité et de valeur scientifique possibles. D'ailleurs elles sont, sous plus d'un point de vue, confirmées par des observations d'une autorité indubitable* (§§ 1—4, 7, 11, 18, 19, 23, etc).

2°. *La Lumière Zodiacale se montre pendant toute l'année sous la forme de Pyramide ou de Cône, reposant sur l'horizon occidental*

ou oriental. Or la preuve que ces deux Pyramides seraient les projections partielles d'un même corps lenticulaire, situé autour du soleil, fait défaut (§ 29).

Evidemment, les cas où les limites des deux Cônes dans une même nuit, ou dans le cours d'un même jour, se laissent relier entre elles, par le prolongement des flancs déterminés, ne peuvent détruire les résultats contraires, acquis par d'autres observations. Ces derniers résultats semblent absolument incompatibles avec l'hypothèse d'un corps entourant le soleil, et ils nous obligent à regarder comme purement accidentels les cas favorables à cette hypothèse [1]).

3°. *Le Cône Zodiacal ne participe pas au mouvement diurne du ciel, quoique cela soit presque universellement admis, d'après l'hypothèse de* Cassini (§ 14, § 19 γ, δ et ϑ).

4°. *L'influence du crépuscule, ou, pour mieux dire, de la lumière réfléchie par l'atmosphère terrestre, semble beaucoup plus limitée que l'on ne croyait jusqu'ici.* En premier lieu, il existe des cas où la Pyramide Zodiacale devient déjà visible lorsque la lumière du jour n'a pas encore quitté le ciel (§ 18), comme cela fut observé par Derham et aussi par Jones (voir p. e. n°. 67, 91 et 103 de ses Observations).

Dans d'autres cas, la Pyramide n'apparaît pas, quoique l'obscurité soit complète (§ 18, observations de M. Piazzi Smyth et de Humboldt), pour se montrer tout à coup un peu plus tard. Ces observations ne laissent rien à désirer quant à leur authenticité. En présence de tels faits, on est naturellement conduit à ne plus accorder une si grande influence au crépuscule, et à voir dans les „phases" des allongements ou des abaissements en majeure partie réels, ainsi que nous l'avons exposé ci-dessus.

5°. *Les observations qui établissent la visibilité du phénomène en temps de brouillard léger, sont en pleine concordance avec ces derniers faits* (§ 19, observ. ζ).

---

[1]) Cette hypothèse reçoit, en outre, un démenti éloquent de l'observation de Jones et de celle de Humboldt, qui ont vu, le soir, deux Pyramides Zodiaçales à la fois (Voir aussi la Note du § 33, 5°).

Cette propriété, constatée par Jones comme par nous-même, reçoit un nouvel appui d'une remarque de M. Schiapparelli, en relation avec le „*Gegenschein*". Dans une lettre à M. Serpieri, il assure avoir noté la singularité curieuse; „que la „lumière Zodiacale était beaucoup plus difficile à distinguer „quand elle dépassait le méridien qu'alors qu'elle ne se trouvait „qu'à 30° au-dessus de l'horizon; et que, quand l'air est le plus „pur et le moins agité, le phénomène se voit moins bien que „lorsqu'il y a dans l'air une certaine espèce de brouillard (*quando* „*vi è nell' aria un non so che di brumoso*)".

A notre avis, cette propriété constitue un argument très défavorable à l'hypothèse qui considère la Lumière Zodiacale comme un phénomène extra-terrestre. Tout observateur qui, avec nous, aurait vu s'affaiblir les parties assez claires de la Voie Lactée sous l'influence du brouillard, lequel cachait même le bord de l'horizon terrestre, tandis que, à la *même* hauteur que les parties voilées de la Voie Lactée, la lueur pyramidale continuait à briller de tout son éclat, — cet observateur aurait nécessairement incliné à croire, comme nous, que le phénomène a quelque relation intime avec les météores de notre atmosphère [1]). La préoccupation de la théorie ancienne pourrait seule détourner notre esprit et nous empêcher de voir une vérité si claire et si proche.

Or nous avons déjà démontré, en 2° et 3°, que cette théorie ancienne a perdu ses appuis les plus solides, à savoir; la connexion des Pyramides Zodiacales du soir et du matin, vues le

[1]) Quelque temps après avoir écrit ces lignes, nous avons trouvé que M. Bruno (*Rendiconti Reale Instituto Lombardo* Ser. II, vol. V, Fasc. VIII) a été conduit par ses observations à énoncer la thèse suivante: „La pré„sence de brouillards donne à la L. Z. une apparence singulièrement belle, „en lui communiquant une couleur laiteuse. De plus, il paraît que la présence „de courants d'air atmosphériques ajoute encore à la lumière un éclat „inusité" (*Naturforscher* 1872, p. 406). — Voilà donc une confirmation inattendue de la propriété découverte par nous. M. Bruno a aussi vu, le soir, le cône à l'orient, qui, pâle au commencement de la nuit, devient de plus en plus égal au cône de l'occident.

même jour, et la participation de ces Pyramides au mouvement diurne du globe céleste.

6°. *Le phénomène de la Lumière Zodiacale subit quelquefois des variations temporaires en intensité lumineuse* (§§ 15, 16, 17, 18), *qui ont été enregistrées par* Jones *et en outre par* de Humboldt, Arago, Birt, etc., et qui doivent, pour plusieurs raisons, être inhérentes au phénomène.

7°. *D'ailleurs la Lumière Zodiacale montre de temps en temps des changements capricieux de forme ou de position* (§ 18, § 19 η, ι), *qui s'effectuent si soudainement et qui ont une si courte durée, qu'ils ne n'expliquent que d'une manière très forcée par l'hypothèse planétaire.* Au contraire ils nous deviennent plus compréhensibles, si nous supposons le siège du phénomène plus près de l'observateur.

8°. *Les élongations des Pyramides du soir et du matin dénoncent une période sémestrale, indépendante de l'influence de la transparence atmosphérique* (§§ 20—23). Cette période résulte aussi bien des observations de Jones, faites sous différentes latitudes terrestres, que de celles de Heis et de Weber, faites en Allemagne pendant une longue série d'années. Les maxima arrivent dans les mois de Juin et de Décembre; les minima dans les mois de Mars et de Septembre.

9°. *Le Cône Zodiacal suit l'observateur dans ses déplacements vers le nord ou vers le sud, de manière à ne point donner d'effet parallactique* (§ 24—26).

Jusqu'ici on n'a pas encore réussi à expliquer cette propriété par la réflexion de la lumière, comme Jones l'a tenté en vain (§ 28), ni par l'absorption de la lumière par l'atmosphère, comme l'a essayé M. Geelmuyden (§ 27). En tout cas, on ne peut nier que cette propriété ne soit au plus haut degré défavorable à l'hypothèse extra-terrestre. L'explication la plus simple serait bien celle-ci: que chaque observateur voit, jusqu'à un certain point, sa propre Pyramide Zodiacale, de la même manière que cela a lieu pour la couronne des Aurores Polaires, dont la direction apparente varie toujours, avec la position du specta-

teur sur la terre, contrairement à un effet de parallaxe. Nous avouons que cette explication est un peu vague; mais il ne s'agit ici que de savoir si la Lumière Zodiacale est un phénomène terrestre, et, à cet égard, nous considérons la susdite propriété comme fournissant une indication assez manifeste. Car il est évident qu'il n'y a que deux cas possibles quant au siège du phénomène, et que, l'un d'eux devant nécessairement arriver, il suffit d'indiquer le cas invraisemblable.

VI. La Lumière Zodiacale est-elle un phénomène planétaire ou un phénomène terrestre?

§ 34. Il y a eu un temps où l'on ne pensait qu'à une seule hypothèse, celle qui considère la Pyramide Zodiacale comme la projection perspective sur le globe céleste d'un corps aplati, ayant pour centre le soleil et qui se composerait de petites planètes ou d'aérolithes, circulant autour de l'astre radieux. Nous avons déjà mentionné (§ 33, 5°.) les deux points d'appui principaux de cette hypothèse, si ancienne, si simple, mais si peu vérifiée. Bien certainement, les phénomènes de la nature ne sont pas en accord avec elle. M. Geelmuyden a beau calculer des formules basées sur cette hypothèse et sur une élongation constante du sommet, en disant que les grandes élongations jusqu'à 180° sont trop rares pour qu'on y fasse attention [1]), ... le phénomène s'écarte en réalité trop des périodes régulières que ces formules du savant danois lui assignent, pour que nous puissions voir dans son opuscule plus qu'un témoignage éloquent de son habileté, à laquelle nous rendons hommage de tout notre cœur. Mais nous ajoutons qu'il n'a nullement prouvé cette ancienne hypothèse, qu'il prend pour base, et qui ne rend compte que très incomplètement des pro-

---

[1]) Jones voyait la L. Z. annulaire *chaque* nuit à Quito! (Schiapparelli, *Astr. Theor. d. Sternschn.*, p. 191).

priétés du phénomène, comme nous croyons l'avoir démontré suffisamment dans ce qui précède.

§ 35. Si on nous fait observer que M. Geelmuyden fonde ses raisonnements en partie sur la position des orbites cométaires, nous objectons que ces dernières sont à peu près uniformément distribuées dans l'espace. Il est vrai, pourtant, que les comètes périodiques peuvent être plus serrées dans le voisinage de l'écliptique; mais les nombres relatifs de l'auteur nous paraissent trop forts en ce sens, parce qu'il compte plusieurs fois l'orbe d'une même comète. La densité des pôles de ces orbites (c'est-à-dire des grands cercles correspondant à leurs plans) doit être considérée, ce nous semble, pour un seul et même instant, si l'on ne fait attention qu'à la position des orbes.

Admettons toutefois, pour un moment [1]), que les orbites des aérolithes soient plus nombreuses dans le voisinage de l'écliptique qu'ailleurs. Nous avouons qu'alors la lumière, réfléchie par les corpuscules vers la terre, ira en diminuant assez rapidement à partir du soleil, le long de l'écliptique. Mais nous ne voyons d'aucune manière pourquoi un tel état de choses ferait apparaître la Lumière Zodiacale sous la forme d'une langue ou pyramide pointue, la terre devant se trouver entourée de ces corpuscules qui lui renvoient la lumière solaire. Nous ne voyons aucune raison pour toutes ces propriétés capricieuses, pour ces mouvements en longueur et en largeur, s'accomplissant pendant des durées si courtes, pour ces pulsations et ces autres singularités, que nous espérons avoir mises hors de tout doute raisonnable.

§ 36. Il y a une partie du travail de M. Serpieri sur laquelle nous portons le même jugement que M. Geelmuyden; c'est la dernière, que nous avons jusqu'ici passée sous silence, et où

[1]) M. Geelmuyden lui-même avoue implicitement que cette thèse n'est nullement prouvée, en disant que le nombre des comètes à grande inclinaison doit être plus grand que le nombre connu, parce que ces comètes peuvent plus facilement passer par leur périhélie sans être aperçues. Or, c'est sur la thèse mentionnée que se fonde tout son raisonnement.

l'auteur fixe l'attention sur la dépendance de l'Aurore Boréale de l'heure locale et sur la ressemblance — du reste un peu incertaine — entre le spectre de ce phénomène et celui de la Lumière Zodiacale. Ces deux arguments ne suffisent pas pour établir que les deux phénomènes sont de nature analogue, comme M. Serpieri le soutient. D'ailleurs il considère comme prouvé que l'Aurore Boréale est un phénomène terrestre, et il voit là un nouveau trait de ressemblance entre les deux phénomènes lumineux. Or il a été démontré récemment que les propriétés de l'Aurore, surtout celles qui se rattachent à l'heure locale, se laissent aisément déduire d'une hypothèse cosmique (Voir notre *Théorie cosmique de l'Aurore Polaire*, dans le *Journal des Spectroscopistes Italiens*, 1878, p. 27). Cette dépendance, connue depuis longtemps sous la forme d'une variation diurne de l'Aurore Boréale, peut très bien être de la même nature que la variation diurne des Étoiles Filantes, phénomène dont l'origine cosmique n'est plus contestée.

§ 37. Outre l'insuffisance de cet argument, l'Aurore possède encore des caractères périodiques, que l'on ne retrouve pas dans la Lumière Zodiacale. En premier lieu, les maxima de l'Aurore arrivent environ vers les équinoxes, tandis que la Lumière Zodiacale a ses maxima d'élongation à peu près vers les solstices (§ 23). En second lieu, la période de onze années ne se trouve pas du tout dans la Lumière Zodiacale, quoique cette lumière soit souvent très intense en temps d'aurores extraordinaires. L'examen spectroscopique a été incertain et souvent défavorable à l'hypothèse d'une connexion intime entre les deux phénomènes. De plus, il y a quelque raison d'attribuer la raie aurorale, vue par Angström, Respighi et d'autres dans le spectre du Cône Zodiacal, à une Aurore Boréale se développant en même temps.

§ 38. En résumé, il n'y a pas lieu de croire à une relation étroite entre les deux phénomènes.

Les partisans de la théorie cosmique des Aurores Polaires n'ont donc pas besoin de s'inquiéter au sujet de leur opinion

sur la Lumière Zodiacale. Ce dernier phénomène peut être terrestre, quelle que soit la nature de l'Aurore Polaire.

§ 39. Il nous reste encore à examiner si les résultats de la spectroscopie sont en accord ou en désaccord avec l'idée de l'origine terrestre de la Lumière Zodiacale.

Il est notoire que Angström remarqua, au mois de Mars 1867, la raie aurorale dans le spectre de la Pyramide Zodiacale. Mais il ajoute qu'il voyait aussi cette raie dans toute autre direction. — M. Respighi observa également, le 5 Févr. 1872, de 7 à 8 h. du soir, la raie aurorale dans le spectre de la Pyramide (*Naturforscher* 1872, p. 107). Après l'avoir mentionnée, il continue ainsi: „*Lorsque je dirigeai ensuite le spectroscope vers la faible* „*lumière qui illuminait le ciel, d'abord dans le méridien magné*„*tique, puis dans tous les azimuths et dans toutes les élévations*, „*je fus surpris de trouver le même spectre, plus ou moins intense*, „*mais partout aussi certain que dans la L. Z.*" — Enfin M. Vogel déclare (*Naturforscher* 1872, p. 288) avoir remarqué la susdite raie dans la Pyramide Zodiacale, mais en même temps „*dans* „*toutes les parties du ciel, qui était couvert d'un voile de* „*lumière mate.*"

Il y a ici un peu d'incertitude, mais il nous semble néanmoins que l'intensité de la raie observée par ces divers savants devait être plus grande dans la direction de la Pyramide Zodiacale qu'ailleurs. Sinon, il aurait immédiatement sauté aux yeux que cette raie appartenait au firmament entier et pas exclusivement à la Lumière Zodiacale. MM. Respighi et Lockyer voyaient décidément le maximum d'intensité de la raie sur l'axe de la Pyramide (*Traité* de M. Serpieri, p. 90). Il paraît donc que ces observations indiquent assez distinctement l'existence d'une certaine connexion entre les deux phénomènes. Hâtons-nous d'observer que cette connexion ne doit pas être nécessairement une connexion d'origine, ainsi que nous l'expliquerons ci-dessous.

§ 40. A ces résultats spectroscopiques s'en ajoutent d'autres, qui attribuent au spectre de la Lumière Zodiadale un caractère

analogue à celui du soleil (Arthur W. Wright) et qui tendent par suite à la faire considérer comme une lumière solaire, réfléchie par des corpuscules inconnus. Des propriétés de polarisation s'y rencontrent aussi, suivant le même observateur.

Encore un autre savant, M. Arcimis, de Cadix, décrit le spectre de la Lumière Zodiacale comme continu, mais contenant deux raies lumineuses, situées environ vers 1480 K et vers 2270 K.. M. Liais, au Brésil, et M. Piazzi Smyth, en Sicile, voyaient le spectre continu sans raie aucune, tandis que M. Tachini, qui assistait à cette dernière observation, remarquait dans ce spectre continu une bande plus vive (*Traité* de M. Serpieri p. 91). Nous lisons dans ce même ouvrage que le P. Secchi n'a jamais pu obtenir un spectre distinct de la Lumière Zodiacale. Une fois il vit un spectre verdâtre, mais faible, se terminant vers le côté du rouge. Dans son beau livre sur le soleil, cet astronome refuse au spectre de la L. Z. toute ressemblance avec celui de l'Aurore Polaire.

Enfin M. Pringle ne voyait qu'un spectre pâle et diffus, sans raies ou bandes, de même intensité que celui des parties claires de la Voie Lactée (*Nature*, 1872, N°. 144).

§ 41. D'après tous ces résultats si différents entre eux, et néanmoins si authentiques, nous croyons pouvoir établir:

1°. *Que la Lumière Zodiacale se compose en partie de lumière propre.*

2°. *Que la connexion de la Lumière Zodiacale avec l'Aurore Polaire n'est que secondaire, temporaire et accidentelle.*

3°. *Que la cause du second de ces phénomènes, quoiqu'elle ne soit pas nécessaire pour le premier, est néanmoins de nature à pouvoir renforcer la Lumière Zodiacale et à en modifier le spectre.*

4°. *Que les résultats de l'analyse spectrale s'ajoutent par conséquent aux autres arguments pour attribuer à la L. Z. un siège dans le voisinage de la terre, où se trouve également, suivant toutes les théories, le siège de l'Aurore Polaire.*

§ 42. Il est peut-être bon de remarquer que, outre cette partie terrestre du phénomène, il en existe probablement encore

une autre, formée par les matières cosmiques accumulées près de l'écliptique (§ 35) et coopérant à la production de la couronne solaire. Il n'y a rien d'étrange à ce qu'un phénomène ait ainsi une double origine. Le cas est le même, par exemple, pour la lumière du fond du ciel, qui est composée de la lumière des étoiles trop petites pour être aperçues séparément, et de la lumière réfléchie qui ne manque jamais dans notre atmosphère.

VII. Conclusion définitive.

§ 43. De quelque manière que nous examinions la question, nous arrivons donc toujours au même résultat, que M. Serpieri a atteint partiellement par d'autres raisonnements. Nous avons vu tomber les soutiens de l'ancienne hypothèse, qui ne suffit plus à expliquer les propriétés du phénomène, découvertes dans notre siècle. Nous avons critiqué un travail récent, tout en rendant justice à l'habileté de l'auteur, qui tâche de défendre les idées anciennes. En combattant ce travail, nous n'avons été conduit par aucun autre motif que la recherche de la vérité: à nos yeux, il ne pouvait pas non plus sauver l'hypothèse planétaire. Pour nous, la conclusion suivante se dégage de toutes les observations: *La Lumière Zodiacale est un phénomène terrestre.* Par là nous ne voulons pas prétendre qu'elle ne puisse être influencée par des causes cosmiques. En réalité, tous les phénomènes de la terre subissent de pareilles influences. Dans la Lumière Zodiacale aussi, nous admettons volontiers une partie secondaire, purement cosmique (§ 42).

§ 44. Qu'est-ce donc que cette lumière mystérieuse, décrite pour la première fois indubitablement par Childrey, au 17e siècle, mais connue déjà longtemps auparavant des Arabes et d'autres peuples islamiques, sous le nom de „*ferji kyazib*", qui veut dire „l'*aube fausse*" (*Nature*, 1879, p. 33)?

Qu'est-ce que cette pyramide composée de plusieurs parties, visible à l'horizon oriental et à l'horizon occidental, souvent

simultanément (§ 33,2° note, Ibid 6°) et par conséquent double, de manière que l'une semble l'image réfléchie de l'autre (Humboldt, *Kosmos* I, p. 144), cette image devenant de plus en plus lumineuse et prenant enfin l'apparence primitive de la Pyramide principale qui, en attendant, s'est éteinte peu à peu? (Jones, Bruno; voir § 33,2°). Qu'est-ce que cette lumière toujours opposée au soleil, que les Allemands nomment le „*Gegenschein*", et que M. Schiapparelli assure ne pouvoir provenir d'un disque entourant le soleil et formé de corpuscules lumineux par eux-mêmes ou réfléchissant la lumière solaire (*Astron. Theorie der Sternschnuppen*, p. 192 etc.)?

A proprement parler, ces questions sont étrangères au but que nous avions spécialement en vue: décider si la Lumière Zodiacale est un phénomène terrestre ou extra-terrestre. A cet égard, notre conclusion est énoncée au § précédent. Néanmoins, les questions ci-dessus posées se rattachent de si près à notre sujet, que nous en dirons quelques mots.

MM. Houzeau, Maxwell-Hall et Serpieri ont déjà proposé l'hypothèse que la Lumière Zodiacale serait en relation avec un appendice de l'atmosphère terrestre, de la nature des queues cométaires. Nous regrettons de n'avoir pas sous les yeux toutes les publications où cette idée a été émise, et nous ne savons jusqu'à quel point elle s'y trouve développée.

Sans doute cette idée a quelque chose de très séduisant, car elle fournit l'explication la plus simple du „*Gegenschein*", ainsi que nous l'avons montré dans notre *Théorie cosmique de l'Aurore Polaire*", p. 38.

En effet, on ne saurait rendre plus facilement compte de ce phénomène qu'à l'aide d'un appendice plus ou moins effilé de l'atmosphère terrestre, dévié vers le côté opposé au soleil, comme les queues des comètes, et faiblement éclairé par la lumière réfractée dans l'enveloppe gazeuse de la terre, lumière qui éclaire aussi la lune totalement éclipsée. „Vue de la Lune", disions-nous „la terre, dans ce cas, sera vraisemblablement entourée „d'un anneau de lumière, comme on en a observé autour des

„planètes Vénus et Mercure, quand elles s'approchent du limbe „solaire, immédiatement avant un passage. C'est cette lumière „réfractée par l'atmosphère terrestre et réfléchie vers l'observateur „par la matière subtile du prolongement de cette atmosphère, „qui, selon nous, peut donner naissance au phénomène jusqu'ici „inexpliqué du „*Gegenschein*".

§ 45. Mais, toute simple et toute séduisante que nous semble cette idée, elle n'est pas assez féconde pour donner aussi une explication des Pyramides Zodiacales avec toutes leurs propriétés, décrites amplement ci-dessus. En réfléchissant à ce sujet et en le considérant de toutes les manières possibles, il nous a paru de plus en plus évident que la Pyramide Zodiacale est une sorte d'illusion optique, occasionnée par quelque matière subtile, gazeuse ou à l'état de poussière, qui, au voisinage de l'observateur, se trouve plus accumulée dans une certaine direction que dans toute autre, de manière que le rayon visuel rencontre plus de particules lumineuses dans cette direction, ou bien, que cette matière réfléchisse une plus grande quantité de lumière vers ce côté.

Qu'on se figure l'atmosphère formant, sous l'action répulsive du soleil, des expansions ou des effusions divisées en couches minces, sensiblement parallèles à l'écliptique. Ces couches, vues d'un point de la terre convenablement situé, pourraient prendre l'apparence perspective des Pyramides Zodiacales. Le rayon visuel compris dans les couches qui contiennent le lieu d'observation pourrait rencontrer plus de particules éclairées par le soleil que celui qui traverserait l'expansion atmosphérique plus obliquement. Le cône d'ombre de la terre déterminerait la longueur apparente des Pyramides, qui, dans des cas particuliers, pourraient ne pas se produire ou montreraient des changements de figure capricieux, parce qu'elles auraient pour condition nécessaire la formation des susdites effusions de l'atmosphère: formation qui dépendrait à son tour de circonstances diverses, cosmiques et terrestres. Des courants électriques pourraient rendre lumineuses ces Pyramides et en augmenter la longueur apparente, de manière même à en faire surgir de toutes nouvelles (§ 19). L'apparence

de la Pyramide opposée (§ 33), croissant en pouvoir lumineux à mesure que l'autre s'efface, ainsi que l'illumination de l'écliptique entière, sous forme d'anneau (§ 19), pourraient également s'expliquer sans trop de peine.

Hâtons-nous de dire qu'en faisant cette digression, peut-être un peu fantastique et en tout cas très superficielle, nous avons seulement voulu montrer que la perte de l'hypothèse ancienne, de Fatio de Duillier, ne nous laisse pas tout à fait sans ressources pour en construire une autre, qui s'accorde mieux avec les faits observés.

Nous reconnaissons volontiers que la nouvelle hypothèse ne paraît ni aussi simple, ni aussi naturelle que l'ancienne, lorsqu'on se borne à considérer les apparences les plus superficielles, à vrai dire mal comprises, du phénomène. Par contre, nous croyons que notre hypothèse rend suffisamment compte des propriétés découvertes dans notre siècle, du moins autant qu'on peut l'exiger d'une idée toute nouvelle. Elle nous semble capable d'expliquer la relation de la Lumière Zodiacale avec les Aurores Polaires, dont nous avons traité ci-dessus (§ 39), soit que celles-ci aient une origine cosmique ou terrestre. Elle rétablira peut-être la concordance, depuis longtemps rompue, entre les différentes déterminations de la hauteur de l'atmosphère, données par la théorie de la pression barométrique, par le segment du crépuscule et par les Étoiles Filantes et les Aurores Polaires.

§ 46. Provisoirement, nous nous contentons d'indiquer ces différents points, dont le développement dépasserait les limites imposées au présent travail. D'ailleurs, nous avouons d'avance qu'un examen nouveau, approfondi et consciencieux, pourra seul décider si notre hypothèse a quelque valeur scientifique, ou si elle doit être considérée comme vaine et passagère.

Cependant nous maintenons la proposition énoncée au commencement de ce chapitre, vu qu'elle est entièrement indépendante de cette hypothèse incertaine, et appuyée de tous les arguments désirables.

SUPPLÉMENT.

Peu de temps après que nous eûmes achevé notre Mémoire, (Déc. 1880) parurent les aperçus de deux nouvelles séries d'observations, qui contiennent tous deux des résultats très intéressants sur ce même sujet.

On trouve le premier dans le *American Journal of Science*, 3th series, vol. XX, p. 437, sous le titre de *Note on the Zodiacal Light*, by Henry Carvill Lewis; un extrait en a été donné par le journal allemand *Naturforscher* (1881, p. 59). L'autre a été publié dans les *Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani*; il a pour auteur M. le P. Serpieri, est intitulé *La Luce Zodiacale confronto tra le osservazioni del* P. Dechevrens *e quelle di* G. Jones, et traite des observations que M. Dechevrens a faites près de Changaï, en Chine.

M. Lewis a observé pendant cinq années consécutives à Germantown, à une lat. de 40°, et il confirme l'existence des parties différentes de la L. Z., que nous avons nommées plus haut la L. diffuse, la L. Centrale, l'Anneau et le „*Gegenschein*" ou la Lueur anti-solaire. Il n'a jamais vu de „pulsations". Pour lui, le Cône Zodiacal montrait des variations d'éclat sensiblement égales dans les mêmes époques des différentes années d'observation. Quant à la comparaison de ce Cône avec la Voie Lactée, l'auteur dit (p. 440): „Any change in the transparency of the atmos„phere or in personal judgment affects equally both phenomena".

Cependant nous devons observer que l'auteur est ici en contradiction directe avec lui-même, car c'est lui qui a observé la même propriété intéressante du Cône Zodiacal indiquée par nous et décrite ci-dessus p. 240, dans notre observation ζ. En effet, p. 439, M. Lewis dit: „*Several observations indicate that the* „*light of the Zodiacal cone has a great penetrating power. Even*

„under atmospheric conditions, in which the Via Lactea is made „nearly invisible, „the Zodiacal cone appears to lose but little „of its light. The light is dense, though dull and ill-defined, „and the impression is given that the matter producing it has „great depth."

On voit que la Voie Lactée, selon les observations de M. Lewis lui-même, n'est *pas* toujours affectée de la même manière que le Cône Zodiacal, par les changements dans la transparence atmosphérique.

Quant au „*Gegenschein*", M. Lewis le trouve situé à 180° du Soleil et environ à 2° au nord de l'écliptique. Dans notre „Théorie cosmique de l'Aurore Polaire (*Mém. d. S. d. Spettr. Ital.* 1878, Vol. VII, p. 37), nous avions donné 0°,9 pour cette distance, d'après toutes les observations qui étaient alors à notre disposition. Notons que ce phénomène, que M. Lewis ne vit jamais au sud de l'écliptique, s'y montra sept fois dans la série d'observations publiée par nous, c'est-à-dire autant de fois qu'il se montra au nord de ce grand cercle.

Ne voulant pas trop allonger ce supplément, nous passerons sous silence les autres résultats si importants de M. Lewis, pour fixer l'attention sur le trait le plus saillant des observations ci-dessus citées de M. Dechevrens, faites en Chine, pendant les années 1875—79, dans des conditions très favorables.

M. Dechevrens trouva l'élongation maximum de la pointe dans les mois de décembre et de janvier, tandis que le Cône matinal disparut totalement en avril—juillet et le Cône du soir en août—septembre. Ce résultat est d'autant plus frappant que Jones observa le Cône dans les mêmes mois et presque dans les mêmes régions en 1854, et M. Serpieri trouve même que pour Jones, durant son voyage le long des côtes de la Chine et du Japon et pendant la traversée de l'Océan Equinoxial, le Cône matinal montra l'un des deux maxima annuels d'élongation, qui est aussi indiqué par les observations du Prof. Heis, à Munster. Pour cette raison, M. Serpieri voit dans les résultats obtenus par M. Dechevrens à Zi-ka-wei des indices d'un caractère local du

phénomène. Cette remarque devient encore plus frappante si l'on considère *que le Cône Zodiacal fut très bien observé en Italie aux mêmes dates où il faisait défaut à Zi-ka-wei.*

Ainsi nous ne croyons pas trop dire en prétendant que les observations les plus récentes contiennent des arguments favorables à la thèse que la Lumière Zodiacale est un phénomène ayant son siège dans le voisinage de la terre.

En dernier lieu, nous citerons un mémoire de M. J. C. Houzeau (*Ciel et Terre* N°. 20, 21, 22, 1880 et 1881), qui nous fut envoyé au commencement de cette année et dans lequel le savant directeur de l'Observatoire de Bruxelles défend, au sujet de la nature de la Lumière Zodiacale, presque la même idée que nous avons développée ci-dessus.

En terminant, nous prions le lecteur de vouloir bien jeter un coup d'œil sur les trois figures de la Planche VII, qui se rattachent à ce que nous avons dit p. 256 du présent Mémoire.

GRONINGUE, juillet 1881.

SUR UNE PROPRIÉTÉ

DES

RACINES D'UNE ÉQUATION DÉRIVÉE,

PAR

G. J. LEGEBEKE.

---

1. Soit $f(z) = 0$ une équation du degré n à coefficients réels, qui admet deux racines réelles a_1 et a_2; suivant le théorème connu de Rolle, l'équation dérivée $f'(z) = 0$ a alors, entre les limites a_1 et a_2, au moins *une* racine réelle. Si toutes les racines $a_1, a_2 \ldots a_n$ de $f(z) = 0$ sont réelles, et qu'on indique successivement sur l'axe réel les points $a_1, a_2, \ldots a_n$, qui correspondent aux valeurs de ces racines, toutes les racines de $f'(z) = 0$ sont aussi situées sur l'axe réel, de sorte qu'entre chaque paire de racines consécutives a_i et a_{i+1} il se trouve une seule racine de l'équation dérivée.

D'après ces propriétés connues, les racines réelles de $f(z) = 0$ déterminent jusqu'à un certain point la position des racines réelles de $f'(z) = 0$.

Dans ce qui suit, je démontrerai une propriété dont se déduisent des valeurs limites pour toutes les racines de $f'(z) = 0$, tant réelles qu'imaginaires, lorsque les positions des racines de $f(z) = 0$ dans le plan sont connues. Cette dernière équation peut

alors avoir aussi bien des coefficients imaginaires que des coefficients réels.

2. *Si a_1, a_2 ... a_n représentent les points du plan dans lesquels sont situées les racines a_1, a_2 ... a_n d'une équation $f(z)=0$ du degré n, toutes les racines de $f'(z)=0$ sont situées à l'intérieur d'un polygone convexe, construit de façon que tous les points a_i tombent à l'intérieur de ce polygone.*

Pour établir ce théorème, je ferai usage d'une propriété des fonctions méromorphes, indiquée par Cauchy. La fonction méromorphe

$$F(z)=\frac{\varphi(z)}{f(z)}=c\,\frac{(z-b_1)(z-b_2)\ \dots\ (z-b_m)}{(z-a_1)(z-a_2)\ \dots\ (z-a_n)},$$

où c représente une constante, devient nulle dans les points b_i et infiniment grande dans les points a_i. Soit maintenant S une courbe simple fermée, qui ne passe par aucun des points a_i ou b_i, mais à l'intérieur de laquelle sont situées p points a_i et q points b_i, alors, si z parcourt la ligne S dans le sens positif, l'argument de $F(z)$ augmentera de

$$2\pi(-p+q).$$

En effet, l'argument de $z-a_i$ est l'angle que $a_i z$ fait avec la droite menée de a_i parallèlement à la partie positive de l'axe réel. Or, si a_i se trouve à l'intérieur de la courbe S, cet argument sera augmenté de 2π après que z aura parcouru la courbe en sens positif; tandis qu'il sera resté le même si a_i est situé en dehors de S. La même chose a lieu pour les facteurs du numérateur. Il en résulte que l'accroissement de l'argument d'une fonction méromorphe $F(z)$, lorsque z parcourt la courbe S, est égal à 2π fois la différence entre le nombre des racines de $\varphi(z)$ situées à l'intérieur de S et le nombre des racines de $f(z)$ situées à l'intérieur de cette même courbe.

Cette propriété se laisse appliquer de la manière suivante. On a

$$f(z)=(z-a_1)(z-a_2)\ \dots\ (z-a_n)$$

d'où

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{z-a_2} \dots + \frac{1}{z-a_n} = \Sigma \frac{1}{z-a_i}.$$

Soit φ_i l'angle que $a_i z$ fait avec la droite menée du point a_i parallèlement à la partie positive de l'axe réel, et posons $a_i z = \varrho_i$, il vient:

$$z - a_i = \varrho_i (\cos \varphi_i + \sqrt{-1} \sin \varphi_i)$$

ou $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \Sigma \dfrac{1}{\varrho_i} \cos \varphi_i - \sqrt{-1}\, \Sigma \dfrac{1}{\varrho_i} \sin \varphi_i = R\,(\cos \Phi + \sqrt{-1} \sin \Phi)$

donc: $\quad R \cos \Phi = \Sigma \dfrac{1}{\varrho_i} \cos \varphi_i \quad$ et $\quad R \sin \Phi = - \Sigma \dfrac{1}{\varrho_i} \sin \varphi_i.$

Examinons maintenant la variation que l'argument Φ éprouve lorsque z parcourt le contour d'un polygone $P_1 P_2 \dots P_m$ ne présentant aucun angle rentrant et construit de façon que tous les points a_i se trouvent à l'intérieur de ce polygone. Soit $P_1\, P_2 \,.. P_m\, P_1$ la direction positive dans laquelle z doit parcourir le contour, et P un point situé sur le côté $P_1\, P_2$, alors les angles φ_i croîtront quand z se mouvra de P vers P_2. Tous les points a_i se trouvent du même côté de $P_1\, P_2$, puisque le polygone ne possède pas d'angles rentrants. En menant donc d'un des points a_i une droite parallèle à $P P_2$, et en désignant par μ l'angle que cette droite forme avec la partie positive de l'axe réel, les angles φ_i, lorsque z se trouve en P, seront tous plus petits que μ et plus grands que $\mu - \pi$. Si z parcourt la droite PP_2, la même chose s'applique à tous les points de cette droite; les angles φ_i croissent, il est vrai, mais restent toujours compris entre les limites qui viennent d'être indiquées. Soit donc

$$\varphi_i = \mu - \psi_i,$$

les angles ψ_i auront, tant que z est sur la ligne $P P_2$, des valeurs comprises entre 0 et π. Or on a:

$$R\cos\Phi = \Sigma\frac{1}{\varrho_i}\cos\varphi_i = \Sigma\frac{1}{\varrho_i}\cos(\mu-\psi_i) = \cos\mu\,\Sigma\frac{1}{\varrho_i}\cos\psi_i + \sin\mu\,\Sigma\frac{1}{\varrho_i}\sin\psi_i$$

$$R\sin\Phi = -\Sigma\frac{1}{\varrho_i}\sin\varphi_i = -\Sigma\frac{1}{\varrho_i}\sin(\mu-\psi_i) = -\sin\mu\,\Sigma\frac{1}{\varrho_i}\cos\psi_i + \cos\mu\,\Sigma\frac{1}{\varrho_i}\sin\psi_i.$$

Si l'on prend:

$$R'\cos\psi = \Sigma\frac{1}{\varrho_i}\cos\psi_i \text{ et } R'\sin\psi = \Sigma\frac{1}{\varrho_i}\sin\psi_i,$$

il vient:

$$R\cos\Phi = R'\cos(\mu-\psi) \text{ et } R_i\sin\Phi = -R'\sin(\mu-\psi).$$

De ces deux dernières égalités on déduit:

$$\Phi = 2n\pi - \mu + \psi,$$

où ψ est déterminé par les équations précédentes.

Il résulte de ces égalités, puisque ψ_i reste compris entre 0 et π, que $\sin\psi$ est toujours positif et que $\cos\psi$ peut être positif ou négatif, — par conséquent, que l'angle ψ est aussi compris entre 0 et π. Les valeurs de l'argument Φ varient donc, quand z parcourt la droite $P P_2$, entre

$$2n\pi - \mu \quad \text{et} \quad 2n\pi - \mu + \pi.$$

Lorsque z se meut sur le côté $P_2 P_3$, on peut montrer, de la même manière, que l'argument est intermédaire entre

$$2n'\pi - \mu' \quad \text{et} \quad 2n'\pi - \mu' + \pi,$$

où μ' représente l'angle qu'une parallèle à $P_2 P_3$, tracée par un des points a_i, fait avec l'axe réel positif. En désignant le supplément de l'angle $P_1 P_2 P_3$ par $s.P_2$, on a évidemment

$$\mu' = \mu + s.P_2,$$

de sorte que les limites sont:

$$2n'\pi - \mu - s.P_2 \quad \text{et} \quad 2n'\pi - \mu - s.P_2 - \pi.$$

Mais, si l'on prend en considération les valeurs déjà trouvées pour l'argument dans le point P_2, on doit avoir $n = n'$, et par conséquent les limites de l'argument, lorsque z se meut le long de $P_2 P_3$, deviennent:

$$2n\pi - \mu - s.P_2 \quad \text{et} \quad 2n\pi - \mu - s.P_2 - \pi.$$

En continuant ainsi, on trouve pour les limites au point P_1:

$$2n\pi - \mu - s.P_2 - s.P_3 \dots - s.P_m$$

et

$$2n\pi - \mu - s.P_2 - s.P_3 \dots - s.P_m - \pi,$$

et finalement, attendu que

$$s.P_1 + s.P_2 + s.P_3 \dots\dots + s.P_m = 2\pi,$$

on a, revenu au point P, comme limites de l'argument Φ:

$$2(n-1)\pi - \mu \quad \text{et} \quad 2(n-1)\pi - \mu - \pi.$$

A l'origine, Φ avait une valeur comprise entre

$$2n\pi - \mu \quad \text{et} \quad 2n\pi - \mu - \pi,$$

de sorte que l'argument de la fonction méromorphe $\frac{f'(z)}{f(z)}$, après que z a parcouru en sens positif le contour du polygone, est augmenté de -2π.

Le même résultat peut aussi être obtenu géométriquement, en composant, de la manière connue, les quantités imaginaires

$$\frac{1}{\varrho_i}(\cos\varphi_i - \sqrt{-1}\sin\varphi_i).$$

En désignant maintenant par q le nombre des racines de $f'(z) = 0$ situées à l'intérieur du polygone, on a, d'après la proposition de Cauchy,

$$2\pi(-n + q) = -2\pi,$$

ou

$$q = n - 1.$$

Par conséquent: toutes les racines de $f'(z) = 0$ tombent en dedans du polygone.

Il est évident que cette démonstration s'applique aussi quand $f(z) = 0$ a des racines égales.

3. Le polygone $P_1 P_2 \dots P_m$ doit être construit de telle sorte que toutes les racines de $f(z)$ soient situées en dedans de son contour, mais la distance des côtés du polygone à cha-

cune des racines peut être prise moindre que toute grandeur finie. On a donc aussi le théorème:

Les racines de $f'(z) = 0$ sont situées à l'intérieur ou sur les côtés d'un polygone convexe, construit de telle sorte que toutes les racines de $f(z) = 0$ soient situées à l'intérieur de ce polygone ou sur ses côtés.

Si les racines de $f(z) = 0$ sont situées sur une ligne droite quelconque, le polygone se change en cette même droite. Par conséquent, si toutes les racines de $f(z) = 0$ se trouvent sur la partie $a_1 a_n$ d'une droite, toutes les racines de $f'(z)$ tombent également sur cette partie de la droite. On retrouve la vérité connue, rappelée au § 1, lorsque la droite coïncide avec l'axe réel.

UTRECHT, février 1881.

RECHERCHES MICROMÉTRIQUES

SUR LA

CONTRACTION DES FIBRES MUSCULAIRES,

PAR

Th. W. ENGELMANN.

Parmi les faits qu'ont mis jusqu'ici au jour les recherches microscopiques sur les ondes de contraction, le plus important est, sans contredit, celui de l'inégalité des changements de hauteur subis par les couches isotropes et anisotropes: on a trouvé, comme on sait, que, lors du raccourcissement graduel du muscle, la hauteur des disques isotropes diminue beaucoup plus rapidement que celle des disques anisotropes. Comme, dans un même compartiment musculaire, la section transversale moyenne des uns et des autres est la même et varie aussi de la même quantité lors de la contraction, et comme, en outre, le volume total du compartiment musculaire reste constant durant cette contraction, le fait susdit contient la preuve que, dans le raccourcissement de la fibre musculaire, le volume de la couche anisotrope augmente aux dépens de celui de la couche isotrope. Ce résultat ayant, ainsi que j'ai cherché à le montrer ailleurs [1]),

[1]) *Mikroskopische Untersuchungen über die quergestreifte Muskelsubstanz.* Second article, dans: Pflüger's *Archiv*, t. VII, p. 176 et suiv., 1873. — *Compte rendu de Congrès international des sc. médic.*, 1879; t. I, p. 573 et suiv., Amsterdam, 1880.

une portée théorique très grande, vu qu'il conduit nécessairement à regarder la contraction musculaire comme consistant essentiellement en un phénomène d'imbibition, le fait en question a besoin d'être établi sur des bases inébranlables et mérite l'examen le plus approfondi. C'est ce qui m'a engagé à entreprendre les recherches suivantes, dont le but était de déterminer, avec toute l'exactitude possible, la marche des variations de hauteur que les couches isotropes et anisotropes éprouvent lors du raccourcissement.

Ces recherches ont été faites, vu l'impossibilité d'employer des fibres vivantes, sur des fibres musculaires d'insectes, fixées, — suivant le procédé ordinaire, par l'action rapide de l'alcool, de l'acide osmique ou de l'acide salicylique, — dans divers états de contraction. J'ai développé antérieurement [1]) les raisons qui nous obligent à regarder les images, fournies par de semblables préparations, comme une expression, et même comme une expression au fond très fidèle, de vrais raccourcissements physiologiques. A cet égard, on peut aujourd'hui citer encore l'importante observation, que M. A. Foettinger a communiquée dernièrement en détail [2]), du rapport existant entre les ondes de contraction, fixées comme il vient d'être dit, et les terminaisons nerveuses. Le fait que, dans toutes les préparations examinées par M. Foettinger, les ondes de contraction s'observent aux points d'entrée de nerfs, de telle sorte que le maximum du raccourcissement, le sommet de l'onde, se trouve sans exception à la face de contact de la substance musculaire et du contenu du mamelon nerveux, le plus souvent tout juste sous le centre de ce mamelon, — ce fait prouve irréfutablement que dans ces cas il s'agit de vraies ondes de contraction, excitées, comme d'ordinaire, à partir de l'extrémité du nerf et fixées dans leur cours par l'agent chimique. Or, sur

---

[1]) Pflüger's *Archiv*, t. VII et XIII, p. 2 f. 1878.

[2]) A. Foettinger, *Sur les terminaisons des nerfs dans les muscles des insectes* (*Onderz. phys. lab.* Utrecht, 3e sér., t. V, p. 293, 1880; voir aussi *Archives de biologie*, t. I, 1880).

ces ondes de contraction indubitablement physiologiques, on reconnaît jusque dans les moindres détails les mêmes changements de la structure musculaire que présentent tous les autres états fixés par le procédé habituel et regardés jusqu'ici, pour des motifs essentiellement différents, comme des ondes de contraction: similitude d'où l'on peut conclure, inversement, à l'origine physiologique de ces états.

J'ai à peine besoin de me justifier de n'avoir fait aucun usage, pour les mesures, des fibres musculaires de vertébrés. Pour plusieurs raisons, elles y sont peu propres. D'abord, la hauteur de leurs compartiments musculaires, à l'état de repos et d'extension, mesure tout au plus 4 μ, très souvent moins de 3 μ, de sorte que la hauteur de chacune des deux couches n'est, au maximum, que d'environ 2 μ. Or les plus petites valeurs qui, dans les conditions optiques les plus favorables, se laissent encore estimer avec quelque certitude au microscope, s'élèvent à environ 0,1 μ. Des erreurs d'au moins 5 %, positives ou négatives, seraient donc inévitables déjà sur les mesures particulières de compartiments à l'état de repos et de relâchement, observés dans les circonstances les plus propices. Les limites des erreurs croîtraient, naturellement, à mesure que par la contraction les valeurs à mesurer diminueraient. On serait donc toujours obligé, même en supposant les conditions aussi favorables que possible, de se borner à l'étude des degrés moyens de raccourcissement et d'exécuter un très grand nombre de mesures. Mais, en réalité, les autres conditions d'observation ne sont, chez les vertébrés, nullement favorables: les fibres sont trop épaisses. Un des points essentiels dans ces mesures, point dont l'importance saute aux yeux, mais auquel on ne saurait pourtant prêter une attention trop soutenue, c'est la position absolument verticale des disques musculaires. Les disques doivent être exactement perpendiculaires au plan du champ visuel, et en outre tout à fait plans, sans courbure. Il faut, de plus, que les rayons lumineux aient, par rapport au plan du champ visuel, une incidence perpendiculaire, ou du moins à peu près perpendiculaire. Alors seulement on est

assuré que la lumière, qui sort d'un des disques musculaires et arrive dans l'œil, n'a traversé que ce disque et non pas, en outre, les disques adjacents. Or, c'est là évidemment la condition capitale à remplir dans les observations de ce genre. Mais on comprend qu'il sera d'autant plus difficile d'y satisfaire que les fibres sont plus épaisses, et, en second lieu, que si les disques s'éloignent un peu de la position verticale, ou les rayons lumineux un peu de la direction normale, l'effet perturbateur de ces écarts sera en général d'autant plus sensible que la hauteur des couches est plus faible, c'est-à-dire, que les stries transversales sont plus serrées. A raison de cette dernière circonstance, les fibres des muscles des vertébrés, même à épaisseur égale, conviennent encore toujours beaucoup moins que la plupart des fibres musculaires d'insectes. Et, si minces qu'elles soient, elles ne satisfont entièrement qu'entre des limites très étroites, et dans des conditions exceptionnellement favorables de situation et d'éclairement. Veut-on, malgré tout, employer des muscles de vertébrés, on est donc obligé de faire les mesures sur de minces faisceaux de fibrilles ou sur des fibrilles isolées. Mais celles-ci ont de nouveau l'inconvénient de n'exercer qu'une action très faible sur la lumière polarisée. En outre, il n'est pas toujours facile de les isoler sans altérer leur forme. Ainsi que l'a fait voir M. Nasse, les fibrilles ont entre elles, justement aux endroits fortement contractés, une adhérence très intime, ce qui les met en grand danger d'être déformées par distorsion, les couches plus extensibles pouvant aisément devenir relativement trop hautes. D'après tout ce qui précède, je ne m'explique pas comment un observateur aussi judicieux que M. Ranvier a pu choisir de préférence les muscles de vertébrés pour exécuter ses observations microscopiques sur la contraction [1].

[1] Au reste, indépendamment de ce choix, la voie suivie par l'histologiste français donne aussi prise aux objections. M. Ranvier tuait les muscles, dans l'état de forte extension, par l'injection d'une solution d'acide osmique à 2 %. La canule métallique, introduite à cet effet dans le muscle, servait en même temps comme une des électrodes pour les courants tétanisants.

Pour les mesures suivantes, je n'ai employé que des muscles d'insectes à compartiments très élevés, ordinairement (*Geotrupes stercorarius*, *Trichius fasciatus*, *Hoplia squamosa*, *Phyllopertha horticola*, *Chrysomela coerulea*, *Aphrophora spumaria*) les fibres très minces et souvent plates qui vont de la hanche à la paroi thoracique, chez le *Telephorus melanurus* surtout les fibres plates et minces qui unissent l'un à l'autre les anneaux de l'abdomen, chez la chenille du *Pieris brassicae* les fibres circulaires extrêmement minces et plates du canal intestinal. Des *Hydrophilus piceus*, *Passalus glaberrimus*, *Elater*, dont les fibres sont en général trop épaisses, j'ai ordinairement utilisé des faisceaux fibrillaires détachés (ayant le plus souvent moins de 2 μ d'épaisseur). Parmi les espèces qui viennent d'être nommées, et même parmi toutes celles que j'ai examinées jusqu'ici, c'est l'*Aphrophora* qui possède les compartiments musculaires les plus élevés, leur hauteur atteignant 17 μ dans l'état de repos et d'extension modérée; viennent ensuite *Telephorus*, *Trichius*, *Passalus*, avec des compartiments de 13—14 μ, *Geotrupes*, *Hoplia*, avec 11—12 μ, *Hydrophilus*, *Phyllopertha*, *Elater*, *Chrysomela*, *Pieris*, avec 10—11 μ.

Avec ces valeurs considérables, les compartiments, même dans un état de contraction relativement forte, restent encore assez élevés pour permettre des mesures suffisamment exactes. Néanmoins, pour les motifs ci-dessus indiqués, j'ai négligé, sauf dans quelques cas exceptionnellement favorables, les compartiments dont la hauteur était réduite jusqu'à 4 ou 3 μ. Ordinairement je ne suis pas descendu au-dessous des hauteurs de 6 ou 5 μ. Celles-ci, d'ailleurs, correspondent déjà le plus souvent à des raccourcissements d'environ 50 % sur la longueur initiale: le stade d'inversion est alors toujours bien développé.

En opérant ainsi, les conditions deviennent tellement complexes, que les résultats microscopiques ne pourraient être interprétés correctement qu'à la suite d'un examen approfondi, à la fois critique et expérimental. Tant que cet examen n'aura pas eu lieu, les résultats de M. Ranvier, entièrement isolés jusqu'ici, ne sauraient prétendre à faire autorité.

Il importe beaucoup de ne choisir pour les mesures que des compartiments compris dans de *longues* ondes de contraction. Quand les ondes sont fortes et courtes, quand, par exemple, la hauteur est réduite à environ $1/8$ au sommet de l'onde et qu'en même temps celle-ci ne s'étend que sur 10—12 compartiments, la contraction est en général parvenue à des degrés très notablement inégaux dans les différentes sections transversales du même compartiment musculaire, par exemple, au stade d'inversion dans la moitié tournée vers le sommet de l'onde, et seulement au stade homogène, ou même encore moins loin, dans la moitié opposée. Pour trouver en pareil cas, aussi exactement que possible, le rapport de hauteur des deux couches pour un degré déterminé de raccourcissement, il serait donc nécessaire d'étendre les mesures aux demi-couches isotropes et de comparer la moyenne des valeurs ainsi obtenues avec la hauteur de la couche anisotrope intermédiaire. L'exactitude des résultats ne pourrait qu'en souffrir, d'autant plus que; même après un raccourcissement modéré, l'épaisseur relative des couches isotropes est déjà fortement diminuée.

J'ai aussi exclu les ondes qui présentaient latéralement une dyssimétrie, et, en général, les compartiments dont les disques n'avaient pas, sur toute leur étendue, une position exactement ou presque exactement transversale par rapport à l'axe de la fibre. Du reste, les mesures correspondantes des deux couches d'un compartiment doivent toujours être prises sur des parties situées exactement à la suite l'une de l'autre, par conséquent sur une même fibrille, attendu que les fibrilles voisines se montrent très souvent un peu dérangées relativement l'une à l'autre dans la direction longitudinale, surtout aux points en repos ou moins fortement raccourcis.

Si l'on a égard à toutes les conditions qui viennent d'être signalées, le nombre des cas qui restent pour les mesures se trouve singulièrement réduit. Même sur les fibres qui au premier abord semblent offrir la conformation et la position les plus favorables, un examen attentif ne fait souvent découvrir que

très peu de compartiments qui conviennent sous tous les rapports, et quelquefois on n'en trouve pas un seul. J'ai, en conséquence, exécuté de chaque espèce animale un très grand nombre de préparations et passé les fibres une à une en revue, pour choisir les compartiments utilisables. La plupart des préparations furent préalablement immergées dans le baume de Canada, d'autres dans la glycérine. Quelques-unes furent aussi examinées dans l'eau. Il n'en résultait pas de différences nettes, ainsi que le montra la comparaison d'un grand nombre de mesures prises sur des fibres musculaires de *Telephorus*, *Hydrophilus* et *Chrysomela*, qui, après un traitement antérieur absolument identique, avaient été étudiées dans les trois liquides en question. Aussi, en considération des avantages supérieurs que présente pour l'examen à la lumière polarisée l'immersion dans le baume de Canada, je donnai par la suite la préférence à ce dernier liquide. Ordinairement, les fibres ne recevaient aucune teinture; dans un assez grand nombre de cas, toutefois, on les colora faiblement au moyen de la picrocarmine, de l'hématoxyline ou de l'éosine, ce qui du reste n'offre pas d'avantage notable pour le but que je me proposais.

Les mesures furent effectuées à un grossissement très fort, de mille à quinze cents diamètres (Zeiss L ou immersion dans l'huile $\frac{1}{18}''$), dans le champ visuel coloré du microscope polarisant. L'analyseur contenait un micromètre oculaire, qui, avec le grossissement employé, permettait d'estimer encore, comme limite extrême, des valeurs de $0^{\mu},1$. Dans beaucoup de cas, au reste, il ne fut tenu compte que des ½ μ. Pour rendre l'observation plus uniforme, je travaillais à la lumière d'une flamme de gaz d'intensité constante. Au moyen du miroir plan et de la lentille de l'appareil d'éclairage d'Abbé, une image nette de la partie la plus lumineuse de la flamme était formée au niveau de l'objet, dans le milieu du champ visuel, ce qui donnait une clarté parfaitement suffisante.

Dans ces observations, comme dans toutes les recherches délicates qui demandent un travail prolongé à de forts grossis-

sements, il est extrêmement utile d'exclure complètement de l'œil toute lumière qui n'arrive pas du miroir, à travers l'objet. Cette lumière peut être de trois sortes principales. Il y a d'abord celle qui, partie du miroir et passant à côté de l'objet, pénètre dans le microscope et éclaire le *champ de vision*. Dans le cas actuel, cette lumière a trop peu d'intensité pour troubler l'observation. En second lieu, la lumière incidente, qui éclaire l'*objet* par en haut. Celle-ci, dans les conditions qu'exigent nos mesures, ne peut pas non plus nuire sensiblement. En troisième lieu, et c'est là en toutes circonstances la portion de beaucoup la plus perturbatrice, la lumière qui tombe *de côté sur l'œil* de l'observateur. Pour savoir jusqu'à quel point cette lumière fatigue et émousse la sensibilité, il faut y avoir été complètement soustrait, ne fût-ce qu'une seule fois, durant une suite un peu longue d'observations microscopiques. Garantir l'œil à l'aide de la main, ou d'un écran, n'apporte qu'un remède partiel et est d'ailleurs incommode sous plus d'un rapport. Je me sers donc depuis plusieurs années, sur la recommandation qui m'en avait été faite par M. Flögel dans une de ses lettres, d'une caisse obscure transportable, qui n'admet la lumière que par une ouverture en entonnoir pratiquée dans sa large paroi postérieure, et qui peut recevoir, outre le microscope et ses accessoires, le haut du corps de l'observateur. Depuis que j'ai appris à connaître les avantages de cette disposition, je ne puis plus, même quand il s'agit d'observations microscopiques moins délicates, travailler à la manière ordinaire, et il en a été de même pour plusieurs confrères qui, d'après mes conseils, se sont procuré cet appareil si simple [1]).

Je noterai encore, au sujet des présentes mesures au microscope polarisant, qu'à l'origine elles furent généralement exécu-

---

[1]) M. Kagenaar, mécanicien du Laboratoire physiologique d'Utrecht, livre la caisse solidement construite, avec accessoires (cases pour serrer les objectifs, oculaires, porte-objets, réactifs, instruments de préparation, plaques de verre dépolies et colorées pour les observations et les expériences à la lumière monochromatique, etc.) au prix de 25 florins. La caisse mesure 75 cm. en hauteur, 80 en largeur et 40 en profondeur.

tées, sur chaque objet, pour les deux orientations opposées: d'abord quand les disques biréfringents apparaissaient colorés en bleu sur fond rouge, puis quand ils apparaissaient colorés en jaune. Mais, comme les résultats obtenus étaient les mêmes dans les deux cas, et qu'il n'y avait pas non plus d'autre motif de préférence, dans la suite je me bornai ordinairement à l'une des deux orientations, le choix étant le plus souvent laissé au hasard. D'autres combinaisons de couleurs, obtenues au moyen de lamelles de gypse de différents ordres et dans différentes orientations, furent également essayées, mais n'offrirent pas d'avantages particuliers. — Chaque mesure était ordinairement répétée trois fois, et même plus souvent. Les écarts entre les mesures isolées et la moyenne étaient en général très faibles et n'atteignaient que par exception des valeurs de 0,3 μ. L'erreur qui en résultait pouvait être négligée sans crainte, vu le nombre ordinairement grand des déterminations correspondantes, et vu surtout la grandeur notable de la différence entre les valeurs moyennes qu'il s'agissait de comparer.

Comme exemples des séries d'observations ainsi obtenues, je communiquerai ici quelques tableaux contenant les valeurs particulières mesurées sur différentes fibres d'insectes. Ces tableaux sont extraits, sans aucun choix, des registres originaux. La première colonne fait connaître le nombre des compartiments mesurés. Bien entendu, ces compartiments ne se suivaient pas immédiatement dans la fibre, comme les nombres se suivent dans la colonne. Entre deux compartiments mesurés il s'en trouvait ordinairement plusieurs autres, souvent même en grand nombre. — Dans la seconde colonne est donnée la hauteur (*H*) du compartiment musculaire entier, dans la troisième la hauteur (*ha*) de la couche anisotrope correspondante, dans la quatrième la hauteur (*hi*) de la couche isotrope qui y joint directement vers le haut ou vers le bas. Les valeurs sont exprimées en μ, sauf dans le tableau VIII (*Hydrophilus*), où l'unité est 0,6 μ.

Tableau I.
Fibre de *Aphrophora spumaria*.
Préparation dans le baume.

No.	H.	ha	hi	Observations.
1.	15,0	7,0	8,0	
		7,5	7,5	
		7,0	8,0	
2.	12,0	6,5	5,5	
		6,5	5,5	
		6,5	5,5	
3.	10,0	6,0	4,0	
		5,5	4,5	
		5,5	4,5	
4.	8,0	5,0	3,0	
		5,0	3,0	
		5,0	3,0	
5.	6,0	4,5	1,5	Inversion.
		4,5	1,5	
		4,5	1,5	

Tableau II.
Fibre de l'abdomen de *Telephorus melanurus*.
Préparation dans le baume.

No.	H.	ha	hi	Observations.
1.	11,5	6,0	5,5	
		6,0	5,5	
		6,0	5,5	
2.	11,0	5,2	5,8	
		5,3	5,8	
		5,3	5,7	
3.	10,0	4,9	5,1	
		5,0	5,0	
		4,9	5,1	
4.	8,0	3,8	4,1	
		3,9	4,2	
		3,9	4,1	
5.	8,0	3,7	4,3	Début du stade
		3,5	4,5	d'homogénéité.
6.	7,0	3,5	3,5	
		3,5	3,5	
		3,5	3,4	
7.	5,0	3,0	2,0	Stade d'inver-
		3,2	1,8	sion.
		3,2	1,9	

Tableau III.
Fibre de *Trichius fasciatus*.
Baume.

No.	H.	ha	hi	Observations.
1.	11,0	6,0	5,0	
		6,0	5,0	
2.	9,5	6,0	3,5	
		5,5	4,0	
		5,5	4,0	
3.	9,0	6,0	3,0	
		6,0	3,0	
4.	7,0	5,0	2,0	
		5,0	2,0	

Tableau IV.
Faisceau fibrillaire de *Passalus glaberrimus*. Baume.

No.	H.	ha	hi	Observations.
1.	12,5	5,0	7,5	
		5,0	7,5	
		5,0	7,5	
2.	12,0	5,0	7,0	
		5,0	7,0	
		5,0	7,0	
3.	8,0	4,5	3,5	
		4,5	3,5	
		4,5	3,5	
4.	7,0	4,0	3,0	Stade de trans-
		4,5	2,5	ition.
		4,3	2,7	

Tableau V.
Fibre de *Geotrupes stercorarius.*
Baume.

No.	H.	ha	hi	Observations.
1.	12,0	5,0	7,0	
		5,0	7,0	
2.	11,5	5,0	6,5	
		4,8	6,7	
3.	10,0	5,0	5,0	
		5,0	5,0	
4.	9,0	4,8	4,2	
		4,7	4,3	
5.	7,0	4,0	3,0	Stade de transition.
		4,0	3,0	

Tableau VI.
Fibre de *Hoplia squamosa.*
Baume.

No.	H.	ha	hi	Observations.
1.	12,0	6,0	6,0	
		6,0	6,0	
		6,0	6,0	
2.	11,0	6,0	5,0	
		5,8	5,2	
		6,0	5,0	
3.	9,0	5,5	3,5	
		5,5	3,5	
		5,5	3,5	
4.	7,0	5,2	1,8	
		5,3	1,9	
		5,0	2,0	
		5,2	1,8	

Tableau VII.
Fibre musculaire de *Phyllopertha horticola.*
Baume.

No.	H.	ha	hi	Observations.
1.	10,0	5,0	5,0	
		5,0	5,0	
2.	9,0	4,7	4,3	
		4,8	4,2	
		4,5	4,5	
3.	7,5	4,0	3,5	
		4,2	3,3	
		4,0	3,5	
4.	6,3	3,8	2,5	
		3,9	2,4	
		3,6	2,7	

Tableau VIII.
Faisceau fibrillaire de *Hydrophilus piceus.*
Baume.

No.	H.	ha	hi	Observations.
1.	16,0	7,0	9,0	
		7,0	9,0	
		7,0	9,0	
		7,2	8,8	
2.	12,5	6,2	6,3	
		6,0	6,5	
		6,2	6,3	
3.	11,0	6,0	5,0	
		5,8	5,2	
		5,8	5,2	
		6,0	5,0	
4.	9,5	5,8	3,6	Stade de transition.
		6,0	3,5	
		6,0	3,5	
5.	8,0	6,2	1,8	Début de l'inversion.
		6,2	1,8	
		6,4	1,6	

Tableau IX.

Fibrille musculaire de *Elater* sp.

Baume.

No.	H.	ha	hi	Observations.
1.	10,0	3,8	6,2	
		3,8	6,2	
		4,0	6,0	
2.	9,0	4,0	5.0	
		3,8	5,2	
		3,6	5,4	
3.	7,0	3,5	3,5	
		3,5	3,5	
		3,5	3,5	
4.	5,8	3,2	2,6	
		3,2	2,6	
		3,2	2,6	

Tableau X.

Fibre de *Chrysomela coerulea.*

Baume.

No.	H.	ha	hi	Observations.
1.	10,0	5,0	5,0	
		5,0	5,0	
		5,0	5,0	
		5,0	5,0	
2.	7,5	4,2	3,8	
		4,0	3,5	
		4,2	3,3	
		4,5	3,0	
3.	7,0	4,0	3,0	
		4,0	3,0	Stade de transition.
		4,2	2,8	
4.	6,0	3,6	2,4	
		3,5	2,5	Fin du stade de transition.
		3,7	2,3	
5.	5,0	3,2	1,8	Inversion.
		3,2	1,8	
		3,1	1,8	
		3,2	1,8	

Tableau XI.

Fibre circulaire de l'intestin de la chenille de *Pieris brassicae.*

Baume.

No.	H.	ha	hi	Observations.
1.	10,0	5,0	5,0	
		5,0	5,0	
		4,8	5,2	
2.	9,0	5,0	4,0	
		5,0	4,0	
		5,0	4,0	
3.	9,0	5,0	4,0	
		5,0	4,0	
4.	8,0	4,5	3,5	Fin du stade de début.
		4,5	3,5	
		4,5	3,5	
5.	4,0	3,0	1,0	Inversion.
		3,2	0,8	
		3,0	1,0	

En combinant toutes les mesures faites sur des muscles de la même espèce, on a calculé les valeurs moyennes de *hi* et de *ha* qui correspondent à des valeurs absolues égales de *H*. Les nombres ainsi obtenus pour *hi* sont réunis dans le tableau suivant. Il n'est pas nécessaire de donner les nombres moyens trouvés pour *ha*, attendu que dans chaque cas particulier ils sont la différence exacte, ou presque exacte, des valeurs de *H* et de *hi*. En tête de chaque colonne se trouve la valeur de *H* à laquelle correspondent les valeurs de *hi* consignées dans cette colonne. Toutes les valeurs sont exprimées en unités μ. Les chiffres placés entre parenthèses indiquent le nombre des compartiments qui ont été mesurés.

Tableau XII.

Valeurs moyennes de la hauteur (*hi*) de la couche isotrope pour différentes hauteurs (*H*) du compartiment musculaire.

H =	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4 μ
phrophora..	7,3 (5)		5,6 (7)	4,5 (2)	4,0 (9)	8,5 (3)	8,0 (3)	2,2 (4)	1,5 (4)		
lephorus..	8,7 (8)	7,8 (3)	7,0 (16)	5,9 (21)	5,3 (38)	4,5 (35)	3,4 (34)	2,5 (31)	1,9 (26)	1,4 (19)	0,7 (16)
chius....		7,0 (4)	6,5 (2)	5,6 (19)	4,6 (21)	8,8 (26)	2,7 (9)	2,5 (4)			
lus.....		7,4 (15)	6,4 (16)	5,6 (16)	5,0 (20)	4,3 (17)	8,4 (15)	2,6 (18)	2,1 (11)	1,5 (19)	
trupes....		8,8 (7)	7,2 (4)	6,0 (9)	5,0 (12)	4,3 (12)					
lia......			6,0 (3)	5,2 (6)	4,9 (14)	3,7 (6)		1,9 (4)			
yllopertha.					5,0 (4)	4,4 (8)	8,6 (19)	3,0 (19)	2,0 (19)		
drophilus.				7,0 (4)	6,0 (17)	4,8 (12)	3,9 (18)	3,1 (44)	2,3 (11)	1,6 (12)	0,9 (16)
ter......				6,9 (8)	6,1 (2)	5,3 (8)			2,6 (5)		1,4 (3)
ysomela...					5,2 (23)	4,5 (32)	3,7 (39)	8,0 (34)	2,1 (38)	1,6 (15)	0,8 (11)
ris.......					5,3 (5)	4,0 (4)	3,5 (6)	2,6 (2)	2,3 (2)		0.9 (7)

Le tableau XII confirme d'abord, — ce qu'avaient déjà laissé reconnaître uniformément les mesures particulières communiquées dans les tableaux I—XI, — que, lorsqu'un compartiment se raccourcit progressivement, la hauteur de la substance intermédiaire diminue d'une manière continue et, relativement, avec plus de rapidité que la hauteur du compartiment. Si à l'aide des nombres contenus dans le tableau XII on construit des courbes, où la marche des variations de hauteur de la couche isotrope soit exprimée en fonction des variations de hauteur du compartiment

musculaire, pour chacune des espèces de fibres examinées, le résultat ci-dessus ressort encore plus clairement. Toutes les courbes ont une forme essentiellement semblable, qui, entre les limites du raccourcissement auquel les mesures s'appliquent, est en général presque rectiligne. L'accord devient surtout frappant si les valeurs moyennes trouvées pour les différentes espèces de fibres sont calculées en centièmes de la hauteur *H'* du compartiment musculaire non contracté et modérément allongé de la même espèce de fibre, et que les valeurs ainsi réduites soient représentées graphiquement au-dessus des mêmes abscisses. En déduisant alors de ces courbes, par voie d'interpolation, les valeurs moyennes qui reviennent à la hauteur *hi* de la substance intermédiaire pour des valeurs déterminées simples de la hauteur *H* du compartiment, ces valeurs exprimées les unes et les autres en centièmes de *H'*, on obtient les nombres rassemblés dans le tableau suivant.

Tableau XIII.

Espèce animale.	H'	(H = 100%)	90 %	80 %	70 %	60 %	50 %	40 %	30 %
Aphrophora....	16 μ	hi = 58,1	46,5	38,5	29,4	23,3	18,8	11,0	
Telephorus....	13 μ	" 60,0	51,5	42,7	35,4	24,6	16,9	11,6	5,0
Trichius......	"	" 53,8	48,5	38,1	29,2	20,8			
Passalus......	"	" 57,0	47,3	40,6	33,8	24,6	17,7	12,3	
Geotrupes.....	12 μ	" 60,0	49,2	39,2	32,1				
Hoplia........	"	" 50,0	42,9	37,1	26,7	16,2			
Phyllopertha..	10 μ	" 50,0	44,0	36,0	30,0	20,0			
Hydrophilus...	"	" 60,0	48,0	39,0	31,0	23,0	16,0	9,0	
Elater........	"	" 61,0	53,0			26,0		14,0	
Chrysomela....	"	" 52,0	45,0	37,0	30,0	21,0	16,0	8,0	
Pieris........	"	" 53,0	40,0	35,0	26,0	22,0		9,0	

Les valeurs admises ici pour *H'* reposent sur des mesures nombreuses. Ce sont à peu près les valeurs maxima qu'on trouve chez les fibres de l'espèce et de l'organe considérés, lorsqu'elles ne montrent pas de signes d'une extension exagérée. Naturellement, ces valeurs de *H'* restent toujours un peu arbitraires, et c'est pour cela que nous les avons arrondies en nombres simples, entiers. Leurs variations éventuelles n'ont toutefois, entre les

limites données par les mesures, aucune influence notable sur les résultats. En conséquence, et vu l'accord assez grand qui existe, pour un même degré centésimal de raccourcissement, entre les valeurs *hi* chez les différentes espèces étudiées, il est permis de prendre derechef les moyennes de ces dernières valeurs. C'est ce qu'on a fait dans le tableau XIV, en ayant convenablement égard au nombre des mesures sur lesquelles repose chacune des valeurs de XIII. Pour rendre le résultat plus saisissant, on a aussi ajouté, dans ce tableau XIV, les valeurs moyennes correspondantes de la hauteur (*ha*) de la couche anisotrope.

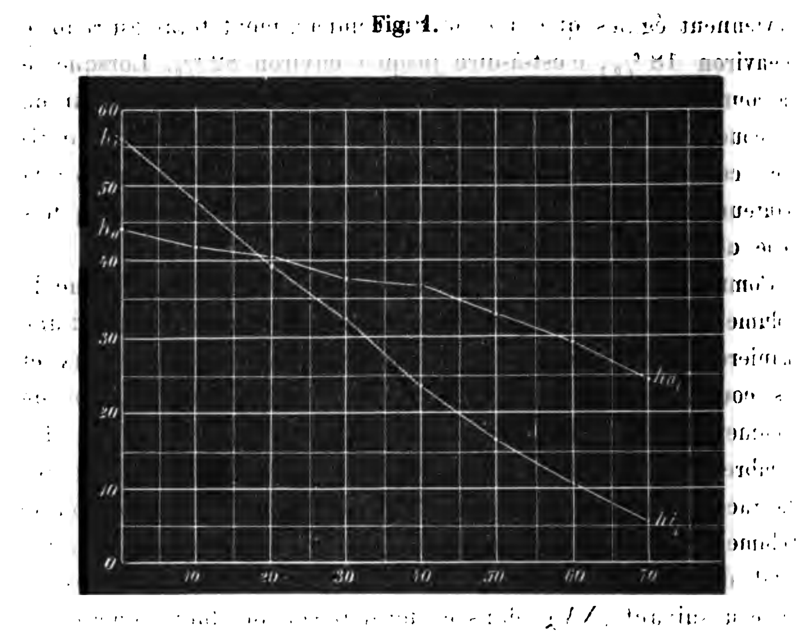
Tableau XIV.

Hauteurs des couches isotropes et anisotropes (en centièmes de la hauteur du compartiment musculaire à l'état de repos et d'extension modérée) pour différents degrés de raccourcissement. Valeurs moyennes, déduites de toutes les mesures prises sur *Aphrophora*, *Telephorus*, *Trichius*, *Passalus*, *Geotrupes*, *Hoplia*, *Phyllopertha*, *Hydrophilus*, *Elater*, *Chrysomela*, *Pieris*.

H	hi	ha
100 %	56,1 %	43,9 %
90	48,0	42,0
80	39,6	40,4
70	32.1	37,9
60	23,1	36,9
50	16,9	33,1
40	10,7	29,3
30	5.7	24,3

Représentés graphiquement, ce qui permet de démêler encore mieux certaines particularités, les résultats donnés dans le tableau XIV prennent la forme de la Fig. 1.

Fig. 1.



La courbe $hi\ hi_1$ indique la marche du décroissement de hauteur de la couche isotrope durant le raccourcissement; la courbe $ha\ ha_1$ représente le décroissement de hauteur de la couche anisotrope. Les abscisses sont proportionnelles aux degrés centésimaux de raccourcissement du compartiment musculaire total; l'unité des ordonnées est 1 % de la hauteur du compartiment à l'état de repos et d'extension modérée.

Les résultats suivants se reconnaissent clairement sur la figure.

La hauteur, tant de la couche isotrope que de la couche anisotrope, décroît d'une manière continue à mesure qu'augmente, depuis zéro, le raccourcissement du compartiment musculaire.

Le décroissement est beaucoup plus rapide pour la couche isotrope que pour la couche anisotrope. Chez la première, il paraît devenir, quand le degré de raccourcissement dépasse 40 %, plus lent qu'au début; chez la seconde, c'est l'opposé.

Tandis qu'à l'état de repos et d'extension modérée la hauteur (*hi*) de la substance intermédiaire surpasse celle de la substance principale dans le rapport d'environ 5 : 4, ces deux hauteurs

deviennent égales quand celle du compartiment total est réduite d'environ 18 %, c'est-à-dire jusqu'à environ 82 %. Lorsque le raccourcissement du compartiment atteint 70 %, la hauteur de la couche isotrope est tombée à environ $\frac{1}{10}$ de sa valeur initiale, celle de la couche anisotrope pas même à la moitié: la hauteur de la substance principale est alors près de cinq fois celle de la substance intermédiaire.

Comme on doit admettre, pour des raisons connues, que le volume de chaque compartiment musculaire ne change pas d'une manière appréciable lors du raccourcissement, les tableaux et les courbes nous renseignent aussi au sujet des variations de volume des deux couches durant la contraction. Si, à l'aide des nombres du tableau XIV, on calcule, pour les différents degrés du raccourcissement, le volume *Vi* de la couche isotrope et le volume *Va* de la couche anisotrope, en centièmes du volume total du compartiment musculaire, on obtient les nombres du tableau suivant (XV), dans la dernière colonne duquel on a noté, en outre, le rapport *Vi* : *Va* pour les différents degrés de raccourcissement.

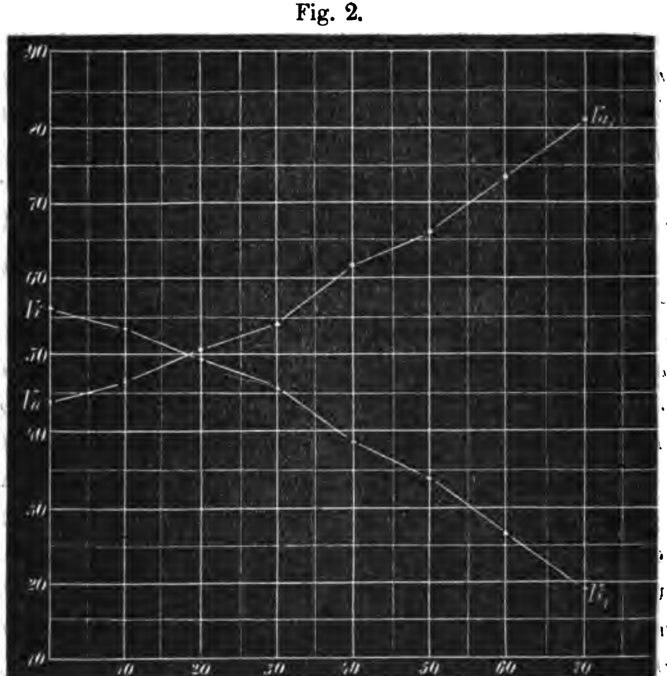
Tableau XV.

Volumes moyens de la couche isotrope et de la couche anisotrope pour différents degrés de raccourcissement (en centièmes du volume du compartiment).

H	Vi	Va	Vi : Va
100 %	56,1	43,9	0,83
90	53,3	46,7	0,92
80	49,5	50,5	1,05
70	45,9	54,1	1,16
60	38,5	61,5	1,60
50	33,8	66,2	1,98
40	26,8	73,2	2,64
30	19,0	81,3	4,65

La marche des variations de volume des deux couches, telle qu'elle résulte du tableau XV, est représentée graphiquement dans la fig. 2.

Fig. 2.



La ligne $Vi\ Vi_1$ montre le décroissement de volume de la couche isotrope, la ligne $Va\ Va_1$ l'accroissement de volume de la couche anisotrope. L'unité des ordonnées est 1 % du volume du compartiment, les abscisses correspondent aux degrés centésimaux de raccourcissement du compartiment.

De l'étude du tableau XV et de la fig. 2 ressortent les relations suivantes entre les volumes des couches et le degré de raccourcissement du compartiment musculaire.

1) *Le volume de la couche isotrope diminue et celui de la couche anisotrope augmente, d'une manière continue, à mesure que le raccourcissement du compartiment, d'abord nul, devient plus considérable.* Dans l'état de repos, le premier volume surpasse le second dans le rapport d'environ 5 : 4; quand le comparti-

ment est raccourci jusqu'à environ 82 % de sa hauteur initiale, les deux volumes sont égaux; lorsque la hauteur du compartiment est réduite de moitié, le volume de la couche anisotrope est le double de celui de la couche isotrope.

2°. [illegible] *de valeur absolue des raccourcissements du compartim*[illegible] *accroissements absolus du volume de la substance princi*[illegible] *d'autant plus grands que le raccourcissement a déjà* [illegible]*. de progrès.* Cet accroissement mesure, par exemple, 6,6 %[illegible]me du compartiment quand, à partir de l'état de repos [illegible]teur est réduite de 100 à 80; il est de 11,0 % pour [illegible]ction de hauteur de 80 à 60, et de 15,1 % pour une c[illegible] de 50 à 30.

3°. [illegible]lement l'accroissement absolu, mais aussi *l'accroissemen*[illegible] *du volume de la couche anisotrope est, pour des valeur*[illegible]*es égales de raccourcissement du compartiment, d'auta*[illegible] *grand que le compartiment est déjà contracté davantage.* [illegible]ans dire, toutefois, que les différences ne sont pas aussi [illegible] que celles des accroissements absolus. Par exemple, l'accr[illegible]t relatif du volume mesure environ 15 % pour un raccou[illegible]ement de 100 à 80, tout juste 20 % pour un raccourcissem[illegible] de 80 à 60, et près de 23 % pour un raccourcissement de 50 [illegible] 30.

4°. Par contre, *à des raccourcissements relatifs égaux du compartiment musculaire correspondent*, à ce qu'il paraît, *des accroissements absolus égaux du volume de la substance principale.* Du tableau et de la figure on déduit, par exemple, pour un raccourcissement du compartiment de

[illegible]0 à 90 % (raccourc. relat. 10 %) — 2,8 % accroiss. de vol. de la couche anis.
[illegible]0 „ 72 „ „ „ „ — 3,0 „ „ „ „ „ „ „ „
[illegible]0 „ 54 „ „ „ „ — 3,0 „ „ „ „ „ „ „ „
[illegible]0 „ 36 „ „ „ „ — 3,0 „ „ „ „ „ „ „ „

Les propositions qui viennent d'être formulées ne peuvent naturellement prétendre à être admises que dans les limites de raccourcissement auxquelles se rapportent les mesures consignées dans le tableau XV et utilisées graphiquement dans la fig. 2,

c'est-à-dire, pour des raccourcissements de 0 à 70 % tout au plus. Mais on sait, depuis les recherches de Ed. Weber, que le raccourcissement peut atteindre des valeurs beaucoup plus fortes, de 80 % et bien au-delà, de sorte qu'on doit se demander comment les choses se passent dans ce cas.

D'abord il est certain que, même aux plus hauts degrés de raccourcissement (95 % et plus), une couche mince de substance isotrope est encore reconnaissable. Jamais le contenu du compartiment ne devient donc tout entier biréfringent. Quant à savoir si le volume de la couche anisotrope continue à croître aux dépens de la substance isotrope, jusqu'à ce que le raccourcissement ait atteint le maximum possible, c'est ce qui ne saurait être décidé, vu la difficulté, et même l'impraticabilité, des mesures nécessaires à cet effet. Tout ce qu'il m'est permis d'affirmer, d'après les observations et les mesures que je possède, c'est que le volume en question croît encore bien au-delà de la limite de 70 %, à laquelle s'arrête le tableau XV. Sur quelques fibres plates et très minces de *Telephorus*, qui même à de très hauts degrés de raccourcissement se prêtaient encore à des mesures parfaitement nettes, j'ai obtenu, par exemple, les valeurs suivantes:

Tableau XVI.

Hauteurs de la couche isotrope (*hi*) pour de très faibles hauteurs *H* du compartiment musculaire.

H (en μ)	Nombre des mesures.	hi (en μ). Moyenne.	Maxim.	Minim.
3,5	13	0,52	0,6	0,5
3,0	24	0,40	0,5	0,3
2,0	3	0,23	0,3	0,2

Si les valeurs trouvées pour *H* sont exprimées en centièmes de la hauteur du compartiment à l'état de repos et d'extension modérée, hauteur qui pour les fibres en question peut être

évaluée à 18 μ., et qu'à l'aide du tableau XVI les volumes des deux couches soient de nouveau calculées en centièmes du volume du compartiment, on obtient les nombres du tableau suivant:

Tableau XVII.

H	Vi	Va	Vi : Va
27,0	14,9	85,1	5,71
23,0	13,3	86,7	6,67
15,4	11,5	88,5	7,70

Ces valeurs, bien que fournies par une seule espèce de fibres et par des mesures relativement peu nombreuses, se relient très bien, comme on voit, à celles du tableau XV. Le fait devient encore plus saillant si on les reporte sur la fig. 2. Mais on reconnaît aussi que, aux approches du maximum possible du raccourcissement, les accroissements de volume de la couche anisotrope, correspondants à des valeurs absolues ou relatives égales du raccourcissement, diminuent de nouveau, tant en grandeur absolue qu'en grandeur relative. Les propositions énoncées ci-dessus, aux 2), 3) et 4), ne subsistent donc plus dans ces circonstances. Il est clair d'ailleurs, vu la grandeur du raccourcissement possible et le rapport donné des volumes des deux couches à l'état de non-contraction, qu'il ne saurait en être autrement. Les nombres communiqués nous apprennent, toutefois, que ces propositions cessent déjà de se vérifier pour des valeurs de raccourcissement comprises entre 75 et 85 %. Elles n'en conservent pas moins, comme on le voit, leur valeur entre des limites très larges.

Ainsi que je l'ai déjà montré dans un travail antérieur, le décroissement de volume de la substance intermédiaire, tel qu'il vient d'être étudié, n'en affecte pas uniformément toutes les couches, mais paraît être, au début, exclusivement borné à la

couche isotrope claire qui se trouve entre le disque accessoire et le disque principal. Plus tard seulement, les disques accessoires se réduisent également à un volume moindre, après quoi le phénomène de l'inversion ne tarde pas à se produire. En raison de la haute importance théorique de ces détails, je n'ai pas voulu négliger de les établir solidement aussi par la voie micrométrique. Il est toutefois facile de comprendre que, si l'on veut obtenir des mesures qui ne soient pas entachées d'erreurs trop fortes, on est réduit à des matériaux encore moins nombreux et surtout à des limites de raccourcissement encore plus étroites que dans les recherches précédentes, où il s'agissait de mesurer, outre la hauteur du compartimeut, la hauteur totale de la substance intermédiaire. Pourtant je communiquerai ici les résultats de quelques mesures faites sur des fibrilles et des faisceaux de fibrilles exceptionnellement favorables (de *Hydrophilus*), parce que ces résultats semblent mériter assez de confiance, ainsi qu'il résulte notamment de la comparaison des maxima observés avec les valeurs moyennes.

Les fibrilles, provenant de fibres musculaires durcies dans l'alcool, furent examinées dans la glycérine étendue. Dans chaque cas on mesurait d'abord la hauteur H d'un compartiment musculaire (plus exactement, la somme de deux couches successives de substance principale et de substance intermédiaire), puis la hauteur (i) de la substance intermédiaire totale, et la hauteur (z) de cette même substance à l'exclusion des deux couches isotropes claires qui touchent aux disques transversaux (donc, la somme du disque intermédiaire et de ses deux disques accessoires). La différence $i—z$ donnait la hauteur totale des deux couches isotropes touchant immédiatement aux disques transversaux.

Tableau XVIII.

Les valeurs de *H*, *i* et *z* sont données en μ. (L'unité du micromètre oculaire équivalait à $0^{\mu},6$).

H	Nombre des compartiments.	*i*			*z*			*i—z*
		Moyenne.	Max.	Min.	Moyenne.	Max.	Min.	Moyenne.
9,5	7	5,2	5,4	4,8	2,6	2,8	2,5	2,6
8,0	16	4,2	4,5	3,9	2,4	2,5	2,4	1,8
7,0	11	3,5	3,9	3,0	2,3	2,4	2,2	1,2
6,0	11	2,1	2,4	1,2	2,0	2,4	1,2	0,1
4,5	17	1,0	1,5	0,7	1,0	1,5	0,7	0,0

Comme on le voit, lorsque le compartiment se raccourcit de 9,5 à 6,0 °/₀ (par conséquent de 95 °/₀ à 60 °/₀, attendu que la hauteur à l'état de repos peut être estimée à 10 μ), les valeurs moyennes *i—z*, décroissent de 2,6 à 0,1 μ, tandis que celles de *z* ne montrent qu'un décroissement de 2,6 à 2,0 μ. Les choses se passent essentiellement de la même manière pour les différences des valeurs correspondantes maxima de *i* et de *z*, et aussi pour celles des valeurs minima. Il n'y a donc aucun doute que le décroissement de hauteur et par suite la diminution de volume de la substance intermédiaire, pour des raccourcissements modérés (dans le cas actuel jusqu'à environ 40 °/₀), ne dépendent en très grande partie de la contraction de la couche claire isotrope intercalée entre les disques transversaux et accessoires. Cette couche finit par devenir si mince qu'elle ne se laisse plus mesurer. Mais il est non moins certain que, ultérieurement, le volume des disques accessoires diminue notablement aussi. Cela ressort d'abord des tableaux précédents, qui ont montré que le volume de la substance intermédiaire continue à décroître même lorsque le compartiment se raccourcit jusqu'à 20—30 °/₀ de sa hauteur à l'état de repos (tabl. XVII); en second lieu, cela est confirmé par les nombres du tableau XVIII: tandis que pour une hauteur de compartiment de 6 μ la couche isotrope mesure encore 2,1 μ,

et qu'ainsi son volume est encore plus du tiers de celui du compartiment total, elle n'occupe plus, quand la hauteur du compartiment est réduite à 4,5 μ, qu'un volume quatre fois et demie plus petit que celui du compartiment. Cette contraction notable ne peut être mise, sauf tout au plus pour une part minime, sur le compte du disque intermédiaire et des minces couches de substance isotrope comprises entre lui et les disques accessoires: la faiblesse de leur volume l'indique déjà suffisamment Il faut donc que, dans ce stade avancé de la contraction, ce soient essentiellement les disques accessoires qui fournissent l'eau nécessaire au gonflement des disques anisotropes.

ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

LE TRANSPORT
DE
L'ÉNERGIE PENDANT LE CHOC DES CORPS,

PAR

C. H. C. GRINWIS.

Les phénomènes du choc des corps solides, qui ont toujours donné lieu à d'importantes recherches de la part des mathématiciens et des physiciens, et qui n'ont pas peu contribué à la connaissance des principes de la mécanique, paraissent être le point de départ le plus convenable pour une étude de la doctrine de l'énergie.

On reconnaît que ces phénomènes, considérés sous ce rapport, fournissent également matière à plusieurs recherches essentiellement théoriques.

Nous nous proposons de traiter maintenant une partie de ce sujet. Dans ce qui suit, nous établirons d'abord les expressions de la vitesse et de l'énergie, et en exposerons succinctement l'usage au point de vue dont il s'agit. Ensuite nous examinerons comment l'énergie cinétique se répartit lors du choc, pour nous arrêter plus spécialement au transport d'énergie qui se fait d'un corps à l'autre, pendant leur rencontre.

A. Etablissement des expressions de la vitesse et de l'énergie.

1. Nous nous occuperons ici principalement du choc *direct* des corps solides, parce que ce cas simple et fondamental se prête mieux à une analyse claire des phénomènes complexes du choc. Le cas du choc *oblique* sera ensuite l'objet d'un examen particulier, qui nous permettra de donner une forme plus générale aux résultats que nous obtiendrons.

Rien ne sera fixé en ce qui concerne la figure des masses soumises au choc; on pourra regarder cette figure comme arbitraire, pourvu que les corps se meuvent de manière qu'il soit satisfait aux conditions du choc *direct*, dans lequel s'opère une poussée normale, suivant la droite qui joint les centres de gravité des deux masses.

Pour simplifier, nous supposons que les corps ne possèdent à l'origine qu'un mouvement de translation; tout mouvement de rotation, avant le choc, se trouve donc exclu.

Les masses ont des vitesses initiales données, de même signe, si elles sont dans la même direction.

Comme d'ordinaire, les forces attractives et répulsives qui agissent entre les deux corps sont négligées, vu que pendant la courte durée du choc leur influence est extrêmement faible. Si nous admettons, en outre, que le choc n'est pas assez violent pour produire sur l'un des corps une impression persistante appréciable, nous pouvons adopter la loi trouvée par Newton, à savoir que, pour deux mêmes corps, il y a un rapport constant entre la vitesse avec laquelle ils s'éloignent l'un de l'autre après le choc et celle avec laquelle ils se rapprochaient avant ce choc.

Après Newton, cette loi a aussi été contrôlée et trouvée exacte dans une longue série d'expériences par Hodgkinson [1]). Le rapport en question n'est toutefois pas absolument constant: il

[1]) *Report of the British Association for* 1834.

diminue pour de grandes vitesses. Nous représenterons ce rapport par e. Eu égard aux paroles de Newton, on l'avait d'abord appelé, assez mal à propos, „coefficient d'élasticité". Suivant l'usage actuel, nous lui donnerons le nom de „coefficient de restitution."

Pour les corps parfaitement élastiques, il est égal à l'unité, pour ceux qui sont entièrement dépourvus d'élasticité, égal à zéro; en général, c'est donc une fraction, qui a été déterminée pour un certain nombre de corps, et bien que ce coefficient paraisse être lié à l'élasticité, il n'exprime actuellement pour nous que la manière caractéristique dont les corps se comportent durant le choc.

Désignant par v, v' et V, V' les vitesses des corps avant et après le choc, nous n'avons besoin, pour déterminer ces deux dernières quantités, que de deux relations:

1° l'équation qui exprime que la somme des moments de mouvement reste constante,

2° la loi de Newton.

Donc

$$mV + m'V' = mv + m'v' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$V' - V = e(v - v') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Soit p le rapport des masses, q celui des vitesses avant le choc, de sorte que

$$m' = pm, \quad v' = qv;$$

posons, pour abréger,

$$1 + pq = \delta \text{ et } 1 - q = f;$$

les équations ci-dessus deviennent:

$$V + pV' = \delta v$$

$$V' - V = efv,$$

d'où

$$V = \frac{\delta - epf}{1 + p} v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$V' = \frac{\delta + ef}{1 + p} v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Remarquons, comme cas particuliers:

1°. Celui où les masses sont égales, $p=1, \delta=1+q=\delta'$,

$$V=\frac{\delta'-ef}{2}v,\ V'=\frac{\delta'+ef}{2}v$$

donc $V+V'=\delta' v=(1+q)v=v+v'$, quel que soit e.

2°. Celui où le second corps est initialement en repos, donc

$$q=0,\ \delta=1,\ f=1,\ V=\frac{1-ep}{1+p}v,\ V'=\frac{1+e}{1+p}v.$$

3°. Celui où les deux conditions sont remplies simultanément,

$$p=1 \text{ et } q=0,\quad V=\frac{1-e}{2}v,\quad V'=\frac{1+e}{2}v,$$

de sorte que $V+V'=v$, quel que soit e.

4°. Celui où le second corps se meut en sens opposé; on a alors q négatif, égal à $-q_1$, $\delta=1-pq_1$, $f=1+q_1$.

Malgré l'extrême simplicité de ces remarques, nous avons cru, à cause de leur généralité, ne pas devoir les omettre.

D'autres conséquences seront examinées, en même temps que deux problèmes concernant l'énergie, lorsque nous aurons déduit les formules pour les énergies cinétiques des deux corps après le choc.

2. La loi trouvée expérimentalement par Newton donne, si l'on introduit la vitesse u du centre de gravité des deux masses, une importante relation entre les vitesses avant et après le choc.

Comme on a

$$u=\frac{mv+m'v'}{m+m'}=\frac{1+pq}{1+p}v=\frac{\delta}{1+p}v,$$

et par conséquent

$$(1+p)u=\delta v,$$

il suit de (1) et (2)

$$V+pV'=\delta v=(1+p)u$$
$$V'-V=efv,$$

donc

$$(1+p)\,V = (1+p)\,u - e\,p\,f\,v \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (5)$$

$$(1+p)\,V' = (1+p)\,u + e\,f\,v \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (6).$$

L'équation (5) donne

$$u - V = \frac{e\,p\,f\,v}{1+p} = e\,\frac{pv - pqv}{1+p} = e\,\frac{(1+p)\,v - (1+pq)\,v}{1+p} = e\,(v-u),$$

et de même on tire de (6),

$$V' - u = \frac{e\,f\,v}{1+p} = e\,\frac{v - v'}{1+p} = e\,\frac{v + p\,v' - v' - p\,v'}{1+p} = e\,(u - v');$$

donc

$$u - V = e\,(v-u) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (7)$$

$$V' - u = e\,(u - v') \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (8).$$

Après le choc, les vitesses relatives des deux corps par rapport au centre de gravité sont donc inverties en direction et réduites dans la raison de $1:e$; comme $e =$ ou < 1, elles sont donc, en général, devenues plus petites.

Pour $e = 0$, la vitesse relative par rapport au centre de gravité disparaît après le choc, et on a

$$V = u = V'.$$

3. Des valeurs (3) et (4) de V et V', il résulte immédiatement, si $\alpha = \frac{m\,v^2}{2}$ et $\alpha' = \frac{m'\,v'^2}{2}$, $\beta = \frac{m\,V^2}{2}$ et $\beta' = \frac{m'\,V'^2}{2}$ représentent les énergies des deux masses avant et après le choc,

$$\beta = \left(\frac{\delta - e\,p\,f}{1+p}\right)^2 \alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (9)$$

$$\beta' = \left(\frac{\delta + e\,f}{1+p}\right)^2 p\,\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (10).$$

Les énergies des deux corps sont donc exprimées en fonction de l'énergie initiale α du corps considéré comme le premier.

Au besoin, on peut dans (10) remplacer α par $\frac{\alpha'}{p q^2}$; β' se transforme alors en

$$\beta' = \left(\frac{\delta + e f}{\delta - f}\right)^2 \alpha' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10_a).$$

Nous emploierons toujours, comme les plus appropriées au but, les expressions très simples (9) et (10). Elles donnent une solution régulière et rapide des problèmes du choc, attendu que, d'après ce qui précède, les facteurs de α et de $p\,\alpha$ représentent aussi les valeurs $\frac{V^2}{v^2}$ et $\frac{V'^2}{v^2}$.

4. Pour montrer l'usage commode des formules en question, nous examinerons quelques-uns des problèmes qu'on peut se poser.

1° *La condition que le premier corps entre en repos après le choc.*

La form. (9) donne $\delta = e p f$ ou $1 + p q = e p (1 - q)$.

Comme cas particuliers, nous citerons les suivants:

a. Lorsque le second corps est initialement au repos, ou $q = 0$, on doit avoir $e = \frac{1}{p} = \frac{m}{m'}$.

b. Pour des masses égales $p = 1$, on doit avoir $q = -\frac{1-e}{1+e}$, ou, si les corps sont parfaitement élastiques, $q = 0$.

c. Pour des vitesses égales, mais opposées, c'est-à-dire pour $q = -1$, on aura $p = \frac{1}{1 + 2e}$, ou, si les corps jouissent d'une élasticité parfaite, $p = \frac{1}{3}$, c.-à-d. $m' = \frac{1}{3} m$.

d. Lorsque les moments de mouvement sont égaux et opposés, ou $\delta = 0$, on doit avoir $e = 0$: les masses dépourvues d'élasticité.

La supposition $q = -1$ rend $V' = 0$ (le second corps au repos après le choc), ou $\delta + e f = 0$, si $p = 1 + 2e$; pour les corps parfaitement élastiques, $p = 3$, ou $m' = 3m$.

2°. *La condition que dans le choc de deux corps il y ait échange des vitesses.*

$$\begin{aligned} \delta - e p f &= q(1 + p) & \delta + e f &= 1 + p, \\ 1 - e p f &= q & p q + e f &= p, \\ e p f &= f & e f &= p f, \\ V = v' \text{ exige } e p &= 1, & V' = v \text{ exige } e &= p. \end{aligned}$$

Pour l'échange des vitesses, il faut donc

$$e = p = 1,$$

c'est-à-dire, que les corps doivent avoir des masses égales et être parfaitement élastiques.

3°. *La perte en énergie cinétique du mouvement de translation, par l'effet du choc.*

En désignant la somme des énergies cinétiques avant le choc par W et après le choc par w, on a

$$W = (1 + p q^2)\,\alpha \qquad w = \beta + \beta' = \frac{\delta^2 + e^2 p f^2}{1 + p}\,\alpha$$

de sorte que la perte U en énergie cinétique, par l'effet du choc, est exprimée par l'équation

$$U = W - w = (1 - e^2)\frac{p f^2}{1 + p}\,\alpha.$$

Cette perte disparaît donc pour les corps parfaitement élastiques, où $e = 1$; elle est au maximum pour les corps dépourvus d'élasticité, chez lesquels $e = 0$; on a alors

$$U_0 = \frac{p f^2}{1+p}\,\alpha = \frac{p^2 f^2 + p f^2}{(1+p)^2}\,\alpha = \frac{(1 + p - \delta)^2 + p(\delta - q(1+p))^2}{(1 + p)^2}\,\alpha$$

$$= \frac{1}{2} m (v - u)^2 + \frac{1}{2} m' (u - v')^2,$$

ce qui signifie que la perte est égale à la somme des demi-forces vives des vitesses perdues et gagnées : le principe connu de Carnot.

4°. *La condition que l'énergie cinétique totale, après le choc, soit $\frac{1}{n}$ de l'énergie initiale.*

$$W = n\,w \quad \text{ou} \quad (1 + p q^2)\,\alpha = n\left(\frac{\delta^2 + e^2 p f^2}{1 + p}\right)\alpha$$

$$n\,\delta^2 + e^2\, n\, p\, f^2 = (1 + p)\;1 + p\, q^2)$$

$$e^2 = \frac{(1 + p - n) + (q - 2n)\, p\, q + (1 - n)\, p^2 q^2}{n\, p\, (1 - q)^2};$$

pour que $n = 1$, c'est-à-dire pour qu'il n'y ait pas de perte, il faut que $e = 1$.

Lorsque le second corps est initialement au repos, on a $q = 0$ et

$$e^2 = \frac{1 + p - n}{n p} = \frac{m + m' - n m}{n\, m'};$$

si en outre les deux masses sont égales, ou $p = 1$, il vient

$$e^2 = \frac{2 - n}{n},$$

de sorte qu'on a toujours $n < 2$; en d'autres termes, lorsqu'une masse quelconque vient heurter une masse immobile de même grandeur, il n'y a jamais plus de la moitié de l'énergie cinétique initiale du mouvement de translation qui se change en une autre forme d'énergie.

B. Répartition de l'énergie cinétique pendant le choc.

5. En vue des développements qui vont suivre, nous déduirons encore d'une autre manière les formules (9) et (10).

La vitesse du centre de gravité des masses choquantes étant de nouveau représentée par u, et les vitesses avant et après le choc par v, v', V, V', on a

$$v \quad \text{ou} \quad u+(v-u) \quad \text{et} \quad v' \quad \text{ou} \quad u-(u-v')$$
$$V \quad " \quad u+(V-u) \quad " \quad V' \quad " \quad u-(u-V');$$

et comme, suivant Newton (voir N°. 2),

$$V-u=e(u-v) \quad \text{et} \quad u-V'=e(v'-u),$$

les vitesses après le choc deviennent

$$u-e(v-u) \qquad u+e(u-v').$$

Les énergies initiales

$$(u+(v-u))^2\frac{m}{2} \qquad (u-(u-v'))^2\frac{m'}{2},$$

ou $\alpha=\left(\frac{\delta+pf}{1+p}\right)^2\alpha \qquad \alpha'=\left(\frac{\delta-f}{1+p}\right)^2 p\alpha,$

deviendront donc

$$(u-e(v-u))^2\frac{m}{2} \qquad (u+e(u-v'))^2\frac{m'}{2},$$

ou bien

$$\beta=\left(\frac{\delta-epf}{1+p}\right)^2\alpha \qquad \beta'=\left(\frac{\delta+ef}{1+p}\right)^2 pa.$$

Comme on le voit, ce mode de déduction diffère du précédent en ce que, dans la première détermination, il a été fait usage de l'invariabilité des quantités de mouvement avant et après le choc, tandis que dans celle-ci on a introduit la vitesse du centre de gravité des corps choquants.

6. Si nous développons les expressions α, α' et β, β', et que nous nous bornions simplement aux numérateurs, nous voyons que dans le choc les formes

$$\text{(I)} \quad \delta^2+2pf\delta+p^2f^2 \qquad p\delta^2-2pf\delta+pf^2 \quad \text{(I')}$$

se transforment en

$$\text{(II)} \quad \delta^2+2epf\delta+e^2p^2f^2 \qquad p\delta^2+2epf\delta+e^2pf^2 \quad \text{(II')}$$

Dans chacune de ces formes, le dernier terme appartient, d'après ce qui a été trouvé au N°. 5, à l'énergie relative par rapport au centre de gravité; les deux premiers termes appartiennent à ce qu'on pourrait nommer l'énergie du centre de gravité, c'est-à-dire, l'énergie cinétique des deux masses, imaginées réunies dans le centre de gravité.

Cette énergie du centre de gravité est, suivant les formules ci-dessus, la même avant et après le choc, ce qui s'accorde avec le mouvement uniforme du centre de gravité; cette partie de l'énergie a pour expression

$$\frac{\delta^2}{1+p}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Nous reviendrons plus loin, avec plus de détails, sur cette expression et sur le partage de cette énergie entre les deux corps avant et après le choc.

Quant à l'énergie relative, elle a, avant et après le choc, les valeurs totales suivantes:
avant:

$$\frac{p^2 f^2 + p f^2}{(1+p)^2}\alpha = \frac{p f^2}{1+p}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

après:

$$\frac{e^2 p^2 f^2 + e^2 p f^2}{(1+p)^2}\alpha = \frac{e^2 p f^2}{1+p}\alpha; \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

durant le choc elle est donc, évidemment par suite de la compression des corps choquants, diminuée de la quantité

$$U = (1-e^2)\frac{p f^2}{1+p}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Nous avons vu plus haut (N°. 4, 3e problème) comment, de cette équation, découle le principe connu de Carnot.

La perte s'élève, pour chacun des corps séparément, à

$$T = (1-e^2)\frac{p^2 f^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$T' = (1 - e^2) \frac{p f^2}{(1+p)^2} \alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Nous devons donc nous représenter que, pendant la première phase du choc, les énergies relatives

$$\frac{p^2 f^2}{(1+p)^2} \alpha \quad \text{et} \quad \frac{p f^2}{(1+p)^2} \alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

disparaissent comme énergie cinétique du mouvement de translation des corps choquants. Dans la seconde phase du choc, les quantités

$$e^2 \frac{p^2 f^2}{(1+p)^2} \alpha \quad \text{et} \quad e^2 \frac{p f^2}{(1+p)^2} \alpha, \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

c'est-à-dire une partie des quantités (17), reparaissent de nouveau comme énergie cinétique du mouvement relatif. Chez les corps dont l'élasticité est parfaite, ce retour à la forme cinétique est *complet*, mais toujours il y a une disparition, suivie d'une réapparition, de l'énergie cinétique, en rapport avec l'altération temporaire, si petite qu'elle soit, de la forme des corps élastiques.

Chez les corps dépourvus d'élasticité, le retour à la forme cinétique fait *entièrement défaut*. En général, une partie de l'énergie disparue, partie indiquée par la grandeur du coefficient e^2 et souvent considérable, est restituée à l'état d'énergie cinétique ou mouvement de translation (qu'il faut bien distinguer de la vibration interne).

Pour le fer (acier) on a

$$e = \frac{5}{9}, \text{ pour l'ivoire} = \frac{8}{9}, \text{ pour le verre} = \frac{15}{16},$$

de sorte que pour

le fer 0,31, l'ivoire 0,78, le verre 0,88

de l'énergie initiale se retrouveront après le choc sous la même forme cinétique, tandis que pour

le fer 0,69, l'ivoire 0,22, le verre 0,12

passeront à une autre forme d'énergie, dont, toutefois, nous ne nous occuperons pas davantage dans ce Mémoire.

La partie non restituée de l'énergie cinétique relative, partie exprimée dans son ensemble par (14) et dans ses deux éléments par (15) et (16), est ordinairement appelée, assez inexactement, l'énergie *perdue*.

7. Nous avons remarqué ci-cessus que la partie de l'énergie, dite énergie cinétique du centre de gravité, qui conserve une valeur constante avant et après le choc, est indiquée par l'expression (13). Il résulte toutefois des formes données dans le N°. 6, que cette énergie, avant et après le choc, est autrement distribuée sur les deux corps; ceux-ci, considérés chacun séparément, en contiennent les quantités suivantes:
avant:

$$\frac{\delta^2 + 2pf\delta}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{et} \quad \frac{p\delta^2 - 2pf\delta}{(1+p)^2}\alpha \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

après:

$$\frac{\delta^2 - 2epf\delta}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{et} \quad \frac{p\delta^2 + 2epf\delta}{(1+p)^2}\alpha; \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

dans le premier corps, cette énergie cinétique est donc *diminuée* de

$$2(1+e)\frac{pf\delta}{(1+p)^2}\alpha,$$

dans le second, elle est *augmentée* de la même quantité.

Evidemment, il s'agit ici d'un *transport* d'énergie du premier corps au second, la quantité de l'énergie transportée étant

$$C = (1+e)\frac{pf\delta}{(1+p)^2}\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

ou, en remplaçant p, f, δ, α, par leurs valeurs,

$$C = (1+e)\frac{mm'(mv + m'v')(v - v')}{(m+m')^2} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

C. Le transport d'énergie pendant le choc.

8. Le transport de l'énergie d'un corps à l'autre se laisse déterminer encore d'une manière toute différente, qui en même temps éclaire ce phénomène d'un jour nouveau.

Partageons, comme à l'ordinaire, l'action entière du choc en deux phases; à la fin de la première phase, lorsque l'énergie cinétique relative par rapport au centre de gravité a disparu comme telle, il reste (voir form. 11) une énergie cinétique totale $\frac{\delta^2}{1+p}\alpha$. Cette énergie est répartie entre les deux corps (N°. 6 I et I') suivant les quantités

$$\frac{\delta^2 + 2pf\delta}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{et} \quad \frac{p\delta^2 - 2pf\delta}{(1+p)^2}\alpha \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

Les deux corps forment à la fin de la première phase une masse réunie, qui se meut avec la vitesse u; les deux parties composantes de cette masse, m et m' ou m et pm, sont dans le rapport de $1:p$. Il est naturel de penser que l'énergie existante $\frac{\delta^2}{1+p}\alpha$ se répartira dans ce même rapport sur les deux masses, de sorte que les deux corps en posséderont, chacun séparément,

$$\frac{\delta^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{et} \quad \frac{p\delta^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

En comparant ces valeurs à celles données en (23), on reconnaît que, pour réaliser cette distribution uniforme, il faut que la quantité d'énergie

$$C_1 = \frac{2pf\delta}{(1+p)^2}\alpha$$

passe du premier corps au second.

Ce résultat s'accorde effectivement avec la valeur (21) trouvée pour C; car, en faisant dans celle-ci $e = 0$, c'est-à-dire en

prenant la partie qui appartient à la première phase du choc et à laquelle se réduit le transport d'énergie chez les corps non élastiques, nous obtenons tout juste la valeur C_1 donnée ci-dessus. Ainsi se trouve éclairée l'une des parties de ce transport d'énergie, et le fait est dévoilé que l'énergie cinétique se distribue de telle sorte entre les deux masses réunies, que sa densité (de volume) soit la même dans chacune d'elles. La présence de l'énergie sous une autre forme, dérivée du mouvement relatif qui existait antérieurement, n'a donc évidemment aucune influence sur la susdite distribution, ce qui est certainement remarquable.

Durant la seconde phase, les énergies relatives

$$\frac{e^2 p^2 f^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{et} \quad \frac{e^2 p f^2}{(1+p)^2}\alpha$$

réapparaissent dans les deux corps, de sorte que, eu égard aussi au transport C_1, les énergies des deux corps deviennent (voir form. (24)):

$$\frac{\delta^2 + e^2 p^2 f^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{et} \quad \frac{p\,\delta^2 + e^2 p f^2}{(1+p)^2}\alpha, \quad \ldots \quad (25)$$

correspondant aux vitesses:

$$\frac{\sqrt{\delta^2 + e^2 p^2 f^2}}{1+p}v \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\delta^2 + e^2 f^2}}{1+p}v \quad \ldots \quad (26)$$

Pour que le mouvement du centre de gravité conservât la même vitesse uniforme qu'avant le choc,

$$u = \frac{mv + m'v'}{m+m'} = \frac{1+pq}{1+p}v = \frac{\delta}{1+p}v, \quad \ldots \quad (27)$$

il faudrait donc qu'on eût:

$$\frac{\frac{\sqrt{\delta^2 + e^2 p^2 f^2}}{1+p}v + p\frac{\sqrt{\delta^2 + e^2 f^2}}{1+p}v}{1+p} = u = \frac{\delta}{1+p}v$$

ou

$$\sqrt{\delta^2 + e^2 p^2 f^2} + p\sqrt{\delta^2 + e^2 f^2} = (1+p)\,\delta,$$

ce qui n'est *pas* le cas, comme on le reconnaît immédiatement en développant les radicaux.

Un second transport d'énergie peut toutefois régler le rapport des énergies de façon qu'il soit satisfait à (27). Représentons en effet par $\frac{p x^2}{(1+p)^2}\,\alpha$, où x^2 est un facteur encore inconnu, l'énergie qui passe du premier corps au second durant la seconde phase du choc; les expressions (25) se changent alors en:

$$\frac{\delta^2 + e^2 p^2 f^2 - p x^2}{(1+p)^2}\,\alpha \quad \text{et} \quad \frac{\delta^2 + e^2 f^2 + x^2}{(1+p)^2}\,p\,\alpha;$$

les vitesses deviennent

$$\frac{\sqrt{\delta^2 + e^2 p^2 f^2 - p x^2}}{1+p}\,v \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\delta^2 + e^2 f^2 + x^2}}{1+p}\,v.$$

L'équation (27) donne alors pour condition:

$$\sqrt{\delta^2 + e^2 p^2 f^2 - p x^2} + p\sqrt{\delta^2\, e^2 f^2 + x^2} = (1+p)\,\delta,$$

d'où l'on déduit

$$2\,\delta\sqrt{\delta^2 + e^2 p^2 f^2 - p x^2} = 2\,\delta^2 - p x^2$$

ou

$$x^2 = 2\,e f \delta,$$

de sorte qu'on a

$$C_2 = \frac{p x^2}{(1+p)^2}\,\alpha = \frac{2\,e p f \delta}{(1+p)^2}\,\alpha,$$

ce qui est précisément la partie encore manquante de C (voir form. (21)).

Cette partie, qui par son transport du premier corps au second fait que le centre de gravité du système se meut avec la même

vitesse uniforme qu'avant le choc, forme pour ainsi dire la réaction par suite de laquelle reparaît l'énergie relative qui existait antérieurement.

Le transport d'énergie C est donc, dans ses deux parties, une conséquence directe de la déformation temporaire, ou peut-être aussi partiellement persistante, que les corps éprouvent dans leur rencontre soudaine. A ce moment, l'énergie relative par rapport au centre de gravité disparaît, mais ensuite elle est restituée en partie; le transport d'énergie est donc une conséquence immédiate et nécessaire de cette disparition et réapparition.

Le transport C_1 correspond à la compression des corps plus ou moins élastiques, le transport $C_2 = e\, C_1$ au retour partiel à la forme primitive.

Bien que l'exposition précédente laisse encore à désirer sous le rapport de la généralité, le résultat obtenu, montrant qu'un principe de dynamique rend ce transport d'énergie nécessaire et l'exige impérieusement, donne à la théorie de l'énergie, telle qu'elle est actuellement constituée, un appui d'une incontestable valeur. Il fait en outre concevoir, et rend même probable, qu'on pourra ramener la théorie de l'énergie aux principes fondamentaux de la mécanique, et par là ouvrir peut-être de nouveaux points de vue sur la connexion intime de ces principes.

9. Le transport d'énergie ainsi obtenu se laisse présenter sous différentes formes. Nous avons trouvé d'abord:

$$C = 2\,(1+e)\,\frac{p f \delta}{(1+p)^2}\,\alpha$$

$$= 2\,(1+e)\,\frac{p\,(1-q)\,(1+p\,q)}{(1+p)^2}\,\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;\text{(I)}$$

et

$$C = (1+e)\,\frac{m\,m'(mv+m'v')}{(m+m')^2}\,(v-v'),\;.\;.\;\text{(II)}$$

d'où il ressort que, pour des corps parfaitement élastiques, C est toujours deux fois aussi grand que pour les corps dépourvus de toute élasticité.

Pour transformer utilement cette dernière expression, nous pouvons introduire les forces (impulsives) R_1 et R_2, qui dans les deux phases du choc agissent sur chaque corps dans une direction opposée, R_1 et $-R_1$ dans la première phase, R_2 et $-R_2$ dans la seconde.

A la fin de la première phase les vitesses des deux corps sont égales, d'où la relation

$$\frac{mv - R_1}{m} = \frac{m'v' + R_1}{m'},$$

de sorte que

$$R_1 = \frac{mm'}{m + m'}(v - v').$$

A la fin de la seconde phase, lorsque les corps se séparent, on a

$$V = \frac{mv - (R_1 + R_2)}{m}, \qquad V' = \frac{m'v' + (R_1 + R_2)}{m'};$$

or, puisque

$$V' - V = e(v - v'),$$

et que R_1 a été trouvée ci-dessus, on obtient facilement $R_2 = eR_1$, comme il était à prévoir.

Par suite, (II) se transforme en:

$$C = (R_1 + R_2)\frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

ou

$$C = (R_1 + R_2)u, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

de sorte que

$$C_1 = R_1 u, \qquad C_2 = R_2 u \ldots\ldots \quad \text{(III}_a\text{)}$$

Si nous remarquons que

$$\alpha = \frac{v^2 m}{2}, \quad \frac{1 + pq}{1 + p}v = u$$

et

$$\frac{p(1 - q)}{1 + p}v = \frac{1 + p - (1 + pq)}{1 + p}v = v - u,$$

nous pouvons écrire, au lieu de la forme (I),

$$C = (1 + e)\, m\, (v - u)\, u, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

ce qui donne

$$C_1 = m\,(v - u)\,u \quad \text{et} \quad C_2 = e\,m\,(v - u)\,u. \;.\;.\; \text{(IV}_a\text{)}$$

Les équations (III_a) expriment un résultat important. On voit, en effet, que le transport d'énergie est égal au produit des forces impulsives par la vitesse u avec laquelle la masse se meut au moment du transport.

Cette loi très simple s'accorde parfaitement avec ce que M. Umow a trouvé, par une voie toute différente, pour le mouvement de l'énergie dans les corps solides [1]). Ce savant russe, qui toutefois ne s'est pas expressément occupé du choc et n'en fait même aucune mention, a étudié le mouvement de l'énergie cinétique dans la supposition que cette énergie soit considérée comme un fluide compressible et élastique. Il a trouvé ainsi, que l'énergie qui dans un temps donné passe par l'unité de surface d'un corps, dans la direction de la force de pression (*Spannkraft*), a pour valeur le produit de cette force par la composante, suivant la direction de la force, de la vitesse du centre de gravité de la masse.

Dans le cas du choc *direct*, qui nous occupe maintenant, les équations (III_a) montrent qu'on a réellement affaire à un cas particulier de la loi de M. Umow, et que cette portion de l'énergie cinétique se comporte effectivement comme un fluide compressible et élastique, ou du moins se meut suivant les mêmes règles qui s'appliquent à une pareille supposition. Cela ne pouvait certes pas être prévu et demandait une démonstration indépendante. L'analogie que notre expression du transport d'énergie indique dans ce cas nous semble pour cette raison, bien que nous ne

---

[1]) *Ableitung der Bewegungsgleichungen der Energie in continuirlichen Körpern, von* Nicolaus Umow, *Docent an der Universität Odessa* (*Zeitschrift fur Mathematik und Physik*, XIX, p. 418.)

soyons encore nullement tenté de regarder l'énergie comme un fluide, un résultat d'une certaine valeur.

Remarquons, finalement, que nous avons calculé l'énergie cinétique par rapport au milieu ambiant considéré comme immobile. D'après les notions ordinaires de la mécanique, la vitesse du centre de gravité, en l'absence de forces extérieures, est une conséquence directe des vitesses prises par les deux corps et de leurs masses connues. Si l'on veut aussi faire entrer en compte le mouvement du milieu, par exemple celui de la Terre, ou celui d'enceintes fermées qui se déplacent súr sa surface et à l'intérieur desquelles le choc s'opère, l'énergie initiale des masses doit être modifiée en conséquence.

Pour l'explication des phénomènes du choc, on peut se dispenser de l'examen approfondi de ce problème, qui offre des difficultés spéciales. Du reste, on sait que la détermination de l'énergie *absolue* qu'un corps contient est impossible, et pour le cas indiqué la connaissance du rôle que le milieu joue comme porteur de l'énergie, et probablement d'autres connaissances encore, seraient avant tout nécessaires. On doit donc, et pour le choc cela ne paraît pas avoir d'inconvénient, se contenter de la connaissance de l'énergie cinétique (relative) par rapport à un mouvement une fois admis.

10. Les formes (I) et (IV) pour C,

$$C = 2(1+e)\frac{p(1-q)(1+pq)}{(1+p)^2}\,\alpha$$

$$C = (1+e)\,m\,(v-u)\,u,$$

font voir immédiatement que C s'annule:

1°. Pour $q=1$ ou $v=u$. Ce cas, toutefois, n'entre pas en considération, parce qu'il ne donne lieu à aucun choc; les deux masses se meuvent alors avec la même vitesse, dans la même direction, et ne se rencontrent pas.

2°. Pour $1+pq=0$ ou $u=0$, c'est-à-dire, lorsque le centre de gravité est en repos ou $mv = -m'v'$, de sorte que les deux

21*

corps possèdent avant le choc des moments de mouvement égaux, mais opposés.

Dans ce cas remarquable, C_1 disparaît (voir N°. 8), à cause de $\delta = 0$; vu que les masses réunies sont au repos à la fin de la première phase, les corps ne contiennent pas d'énergie cinétique. De même C_2 s'annule, parce que, le centre de gravité étant au repos, la nécessité d'un transport d'énergie n'existe plus, ainsi qu'il résulte du N°. 8.

Malgré cette disparition caractéristique de C_1, la transformation de l'énergie relative par rapport au centre de gravité se fait comme à l'ordinaire, quel que soit e, et comme on a

$$q = -\frac{1}{p}, \quad \text{donc} \quad \frac{pf}{1+p} = 1 \quad \text{et} \quad \alpha' = p\,q^2\,\alpha = -q\,\alpha = \frac{\alpha}{p},$$

les équations (15) et (16) deviennent

$$T = (1 - e^2)\,\alpha \qquad T' = (1 - e^2)\frac{\alpha}{p} = (1 - e^2)\,\alpha';$$

toute l'énergie cinétique est ici de l'énergie relative, et chez les corps non élastiques *toute* l'énergie de mouvement se convertit en une autre forme.

La *valeur-maximum* de C se déduit immédiatement de l'équation (IV).

Pour une vitesse initiale donnée v, le second membre devient le plus grand possible lorsque

$$\left.\begin{array}{c} u = \frac{1}{2}v \\ \text{ou} \\ 1 + 2pq - p = 0 \end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

condition à laquelle il est satisfait dans un nombre infini de cas particuliers; entre autres, pour des masses égales, lorsque $q = 0$: ainsi, pour des masses égales, le plus grand transport d'énergie a lieu lorsque la seconde masse est au repos.

En général, la valeur maximum que C peut prendre découle immédiatement de (IV), qui, pour $u = \frac{1}{2} v$, donne

$$C = (1 + e)\frac{m v^2}{4} = \frac{1 + e}{2} \alpha,$$

tandis que, dans ce cas,

$$T = \frac{1 - e^2}{4} \alpha \qquad T' = \frac{1 - e^2}{4} \frac{\alpha}{p}.$$

Chez les corps parfaitement élastiques, *toute* l'énergie cinétique passe du premier corps au second; chez les corps non élastiques, pour lesquels $C = \frac{1}{2} \alpha$, c'est la *moitié* de cette énergie qui subit ce transport. On voit, en outre, que les énergies cinétiques dites perdues, T et T', ont, quel que soit e, le *quart* de la valeur qu'elles possèdent dans le cas où il n'y a pas de transport d'énergie.

Remarquons enfin, en suite de ce qui a été dit ci-dessus de la disparition de C, que, pour $1 + p q < 0$, C devient *négatif*; ainsi, quand les corps avant le choc se meuvent en sens opposé, et qu'on a $m' v' > m v$, de l'énergie passe du *second* corps au *premier*. En d'autres termes, lorsque les mouvements sont de direction *opposée* avant le choc, il y a toujours transport d'énergie du corps dont le moment de mouvement et le plus grand à celui dont le moment est le plus petit. Lorsque les mouvements s'opèrent dans la *même* direction, le transport d'énergie part toujours du corps qui a la plus grande vitesse et qui est ordinairement désigné comme le corps *choquant*.

11. Examinons maintenant brièvement le choc *oblique*, sans frottement, donc entre des surfaces polies. Bornons-nous au cas de deux *sphères*, et supposons que les directions des mouvements fassent avant le choc des angles ϑ, ϑ', et après le choc des angles φ, φ', avec la droite qui joint les centres. Comme aucune force impulsive n'agit sur les corps dans la direction perpendi-

culaire à cette droite, les vitesses suivant cette perpendiculaire ne changent pas, de sorte qu'on a

$$\left.\begin{array}{l} V \sin\varphi = v \sin\vartheta \\ V' \sin\varphi' = v' \sin\vartheta' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

En suivant la même marche qu'au N°. 1, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} V \cos\varphi = \dfrac{(m\,v \cos\vartheta + m'\,v' \cos\vartheta') - e\,m'\,(v\cos\vartheta - v'\cos\vartheta')}{m+m'} \\ V' \cos\varphi' = \dfrac{(m\,v \cos\vartheta + m'\,v' \cos\vartheta') + e\,m\,(v\cos\vartheta - v'\cos\vartheta')}{m+m'} \end{array}\right\}. \quad (30)$$

Si l'on pose

$$\frac{v' \cos\vartheta'}{v \cos\vartheta} = q', \qquad 1 + p\,q' = \delta', \qquad 1 - q' = f',$$

il suit de (30)

$$V\cos\varphi = \frac{(1+pq') - ep\,(1-q')}{1+p}\, v\cos\vartheta = \left(\frac{\delta' - ep\,f'}{1+p}\right) v\cos\vartheta,$$

et comme (29) donne

$$V \sin\varphi = v \sin\vartheta,$$

on aura

$$V^2 = \left\{ \left(\frac{\delta' - e\,p\,f'}{1+p}\right)^2 \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta \right\} v^2$$

ou

$$\beta = \left\{ \left(\frac{\delta' - e\,p\,f'}{1+p}\right)^2 \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta \right\} \alpha; \ldots\ldots (31)$$

comme

$$1 + p = 1 + p\,q' + p - p\,q' = \delta' + p\,f',$$

on a aussi

$$\alpha = \left\{ \left(\frac{\delta' + p\,f'}{1+p}\right)^2 \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta \right\} \alpha \ldots\ldots (32)$$

De la comparaison de (31) et (32) il résulte (voir N°. 7)

$$C = 2\,(1+e)\frac{p\,f\,\delta'}{(1+p)^2}\cos^2\vartheta\,.\,\alpha\,, \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V)}$$

$$= 2\,(1+e)\frac{p\,(1-q')\,(1+p\,q')}{(1+p)^2}\cos^2\vartheta\,.\,\alpha\,, \ldots\ldots \text{(V}_a\text{)}$$

$$= (1+e)\frac{p\,(v\cos\vartheta - v'\cos\vartheta')}{1+p}\,.\,\frac{(v\cos\vartheta + p\,v'\cos\vartheta')}{1+p}\,m\;.\;\text{(V}_b\text{)}$$

Le transport d'énergie est donc égal à la force en action dans le choc, multipliée par la composante de la vitesse du centre de gravité, dans la direction de cette force. La règle d'Umow (N°. 9) se vérifie donc aussi dans le choc oblique.

On trouve enfin que, dans ce cas plus général, l'énergie dite perdue (voir N°. 6, form. 14, 15, 16) devient pour le système entier

$$\left.\begin{aligned} U &= (1-e^2)\frac{p\,f^2}{1+p}\cos^2\vartheta\,.\,\alpha \\ &= \frac{(1-e^2)}{2}\,\frac{m\,m'}{m+m'}\,(v\cos\vartheta - v'\cos\vartheta')^2 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots (33)$$

et pour chacune des masses séparément

$$T = (1-e^2)\,\frac{p^2\,f^2}{(1+p)^2}\cos^2\vartheta\,.\,\alpha$$

$$T = (1-e^2)\,\frac{p\,f^2}{(1+p)^2}\cos^2\vartheta\,.\,\alpha$$

ou

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1-e^2}{2}\,.\,\frac{m\,m'^2}{(m+m')^2}\,(v\cos\vartheta - v'\cos\vartheta')^2 \\ T' &= \frac{1-e^2}{2}\,.\,\frac{m^2\,m'}{(m+m')^2}\,(v\cos\vartheta - v'\cos\vartheta')^2 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots (34)$$

12. Il résulte des développements qui précèdent, que les expres-

sions pour l'énergie cinétique des deux corps, après le choc, se laissent écrire de cette manière:

$$\beta = \alpha - C - T, \qquad \beta' = \alpha' + C - T'; \quad . . (35)$$

en remplaçant T, T' et C par leurs valeurs (15), (16) et (I) de N°. 9, et remarquant qu'on a $\alpha' = p\, q^2 \alpha$, on retrouve naturellement les valeurs obtenues sous (9) et (10).

Si le second corps est sans mouvement initial, l'énergie cinétique de cette masse est après le choc

$$\beta' = C - T';$$

dans ce cas, où $q = 0$,

on a

$$C = 2\,(1 + e)\frac{p}{(1 + p)^2}\alpha \quad \text{et} \quad T' = (1 - e^2)\frac{p}{(1 + p)^2}\alpha.$$

De l'énergie transportée, la partie

$$C - T' = (1 + e)^2 \frac{p}{(1 + p)^2}\, \alpha \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \; (36)$$

persiste donc comme énergie du mouvement de translation; le reste

$$T' = (1 - e^2) \frac{p}{(1 + p)^2}\, \alpha \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \; (36_a)$$

est converti en une autre forme d'énergie.

Le rapport de ces deux parties

$$\frac{C - T'}{T'} = \frac{1 + e}{1 - e} \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \; (37)$$

dépend uniquement de e: il est indépendant du rapport des masses, ainsi que de l'énergie initiale du corps choquant.

Pour les corps non élastiques, on a

$$C = 2\, T'; \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \; (38)$$

C se partage donc, dans ce cas, en deux parties *égales*.

Pour des corps quelconques, les expressions (36) et (36_α) prennent, α étant donné, leur valeur maximum quand $p = 1$, c'est-à-dire quand les masses sont égales. Ainsi s'explique pourquoi, dans beaucoup d'applications des phénomènes du choc, lorsque la seconde masse est grande, on donne également une grande masse au corps choquant. Ne pouvant faire ici une étude spéciale de l'énergie dite perdue, nous devons nous borner à cette remarque.

En général, quand e, p et q sont quelconques, l'énergie se distribuera donc, après le choc, de manière que les masses possèdent, chacune séparément, les quantités

$$\left.\begin{aligned} &\beta = \alpha - C - T = \left(\frac{\delta - e p f}{1+p}\right)^2 \alpha \\ \text{et} \quad & \\ &\beta' = \alpha_\prime + C - T' = \left(\frac{\delta + e f}{1+p}\right)^2 p\, \alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (39)$$

d'énergie cinétique de mouvement de translation,
et les quantités

$$T = (1 - e^2)\frac{p^2 f^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{et} \quad T' = (1 - e^2)\frac{p f^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \ldots\ldots (40)$$

d'énergie sous une autre forme.

13. Considérons enfin, au point de vue du transport d'énergie, le cas où plusieurs corps sont successivement soumis à un choc direct. Pour simplifier, nous prenons ces corps parfaitement élastiques, ou $e = 1$.

Supposons que le corps L ne rencontre pas le corps immobile P, mais vienne heurter un corps immobile R, lequel à son tour, par voie de choc, communique à P une partie de l'énergie qu'il avait acquise.

Représentons les masses des trois corps L, R et P par

$$m, \quad r m, \quad p m,$$

l'énergie initiale de L par α, et les énergies cinétiques après le choc par

$$\beta, \quad (\beta'_1, \beta'_2), \quad \beta''.$$

Si le corps R n'existait pas, le choc direct entre L et P donnerait lieu, attendu qu'on a $q = 0$, aux énergies

$$(\beta) = \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^2 \alpha, \qquad (\beta'') = \left(\frac{2}{1+p}\right)^2 p\,\alpha; \; . \; . \; . \; (41)$$

la vitesse du corps P deviendrait donc

$$V' = \frac{2}{1+p} v, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (42)$$

v étant la vitesse initiale de L.

Lorsqu'on interpose le corps R, cette masse acquiert une vitesse

$$(V) = \frac{2}{1+r} v,$$

tandis que la vitesse de P, après le choc, devient alors

$$V'' = \frac{2}{1+\frac{p}{r}} (V) = \frac{4}{(1+r)\left(1+\frac{p}{r}\right)} v.$$

Cette expression acquiert sa valeur la plus grande, pour des valeurs différentes de r, quand le dénominateur est le plus petit possible, c'est-à-dire, quand

$$1 - \frac{p}{r^2} = 0 \quad \text{ou} \quad r = \sqrt{p},$$

par conséquent, lorsque la masse R est moyenne proportionnelle entre L et P.

On a alors

$$V'' = \frac{4}{(1+\sqrt{p})^2} v \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (43)$$

Si l'on compare cette valeur avec celle obtenue en l'absence du corps intermédiaire R, on trouve

$$\frac{V''}{V'} = \frac{2(1+p)}{(1+\sqrt{p})^2} v = \frac{2}{1+\frac{2\sqrt{p}}{1+p}} \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

et comme on sait qu'en général

$$\frac{2\sqrt{p}}{1+p} < 1, \quad \text{on aura donc} \quad V'' > V,$$

de sorte que le corps R *augmente* la vitesse finale de P.

Lorsque $p = 1$, et qu'ainsi L, R et P ont des masses égales, $V'' = V$, et le corps intermédiaire n'a donc aucune influence.

Si nous considérons, au lieu des vitesses, les énergies des trois corps après le choc, nous trouvons pour celle

$$\left.\begin{aligned}
&\text{de } L, \ \beta = \frac{1-2p+p^2}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha = \frac{(1-p)^2}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha \\
&\qquad\qquad C' = \frac{4\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^2}\alpha \\
&\text{de } R, \ \beta'_2 = \frac{4\sqrt{p}-8p+4p\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha = \frac{(1-\sqrt{p})^2 . 4\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha \\
&\qquad\qquad C'' = \frac{16p}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha \\
&\text{de } P, \ \beta'' = \frac{16p}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha
\end{aligned}\right\} \ldots (45)$$

C' et C'' désignent les quantités d'énergie transmises par L à R et par R à P.

Toujours on aura donc

$$\frac{C''}{\alpha} = \left(\frac{C'}{\alpha}\right)^2 \quad \text{ou} \quad (C') = C''\alpha.$$

Pour $p = 1$, c.-à-d. pour des masses égales, il vient

$$\beta = \beta'_2 = 0, \quad \beta'' = \alpha, \quad C' = \alpha, \quad C'' = \alpha.$$

Toute l'énergie cinétique est donc transportée au troisième corps. Pour $p = \frac{1}{4}$, on trouve

$$\left.\begin{array}{l} \beta = \frac{9}{81}\alpha, \quad \beta'_2 = \frac{8}{81}\alpha, \quad \beta'' = \frac{64}{81}\alpha \\ C' = \frac{72}{81}\alpha = \frac{8}{9}\alpha, \quad C'' = \frac{64}{81}\alpha \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (46)$$

Si l'on compare l'énergie de P dans le cas du choc de *trois* corps L, R, P, donnée par (45), avec cette même énergie dans le cas du choc de *deux* corps L et P, représentée par (41), on trouve pour leur rapport — résultat conforme à celui trouvé en (44) — la valeur

$$\frac{\beta''}{(\beta'')} = \frac{4(1+p)^2}{(1+\sqrt{p})^4} = \left(\frac{2}{1+\frac{2\sqrt{p}}{1+p}}\right)^2,$$

qui est toujours plus petite que l'unité, à moins que les masses ne soient égales.

Pour $p = \frac{1}{4}$, l'énergie de P, dans le cas de deux corps, serait (voir (41))

$$= \frac{16}{25}\alpha = 0{,}64\,\alpha,$$

tandis que l'interposition d'une troisième masse, moyenne proportionnelle entre les deux autres, élève l'énergie de P (voir (46)) à

$$\frac{64}{81}\alpha = 0{,}97\ \alpha.$$

L'influence du corps interposé, de masse $m\sqrt{p}$, a une *double* cause. D'abord, le rapport entre la masse de ce corps intermédiaire et celles des deux corps extrêmes est plus rapproché de l'unité que celui de ces deux masses extrêmes, et puisque pour $e = 1$ et $q = 0$ on a

$$C = \frac{4p}{(1+p)^2}\alpha,$$

forme qui pour $p=1$ prend la valeur maximum α, il s'ensuit que le corps L cède plus d'énergie au corps interposé R qu'il n'en anrait cédé directement à P. Ensuite, R communiquera aussi plus d'énergie au dernier corps P que ne le ferait, pour la même énergie, une masse égale à L. Il est vrai que R possède en général moins d'énergie que L, mais, en fin de compte, le rapport des masses agit favorablement sur le transport d'énergie. Les valeurs numériques trouvées dans l'exemple (46) peuvent servir d'éclaircissement.

Lorsque les masses extrêmes, et par conséquent les *trois* masses, sont égales, *toute* l'énergie est transmise, comme dans le cas de *deux* masses égales; l'interposition ne peut alors, le transport d'énergie étant déjà complet, donner aucun avantage.

Ce qui est accompli par un corps intermédiaire unique se laisse attendre, à un plus haut degré encore, d'un plus grand nombre $(n-1)$ de corps interposés, qui, d'après ce qui précède, rendront la vitesse finale du dernier corps la plus grande possible lorsque leurs masses formeront avec L et P une progression géométrique.

Dans cette dernière supposition, et le $(n+1)^e$ corps P ayant pour masse

$$m_{\prime} = p\,m = r^n\,m$$

ou

$$r^n = \frac{m'}{m} = p = \sqrt{r^n}\,.\,\sqrt{\frac{m'}{m}},$$

on trouve pour sa vitesse, par l'application répétée de la formule (10) du N°. 3,

$$V_n = \left(\frac{2}{1+r}\right)^n v = \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^n . \left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right)^n v = v\,.\left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right)^n . \sqrt{\frac{m}{m'}}.$$

Si dans cette expression on fait croître la valeur de n, on trouve à la limite, attendu que $r = \sqrt[n]{p}$ et

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{2\sqrt[2n]{p}}{1+\sqrt[n]{p}}\right)^n=1,$$

$$V_n = v\sqrt{\frac{m}{m'}} = v\sqrt{\frac{1}{p}}.$$

Par suite, l'énergie de la dernière masse P devient

$$\frac{1}{2}V_n^2\, m' = \frac{1}{2}v^2\frac{m'}{p} = \frac{v^2\, m}{2} = \alpha,$$

de sorte que dans ce cas irréalisable, *idéal*, *toute* l'énergie passe du premier corps au dernier.

On arrive au même résultat en remarquant que la quantité d'énergie que L cède au corps suivant, dont la masse est r fois plus grande, est exprimée par

$$C = \frac{4\, r}{(r+1)^2}\,\alpha,$$

et puisque $r = \sqrt[n]{p}$, on aura $\lim\limits_{n=\infty} r = 1$ et $C = \alpha$.

Le rapport des masses successives, à mesure que leur nombre croît, se rapproche de l'égalité, et dans ce cas les corps parfaitement élastiques, tels que ceux dont il s'agit ici, sont privés de toute énergie cinétique.

Ce qui précède peut contribuer aussi à éclairer les phénomènes connus que présente le choc d'une série de boules (d'ivoire) suspendues, notamment dans le cas où les masses ne sont pas égales.

Evidemment nous sommes ainsi conduits à l'étude de la propagation de l'énergie cinétique dans les corps solides. Cette question, qui est en connexion très intime avec celle du transport de l'énergie pendant le choc, exige un examen spécial.

UTRECHT, janvier 1881.

L'INFLUENCE DE LA LUNE

SUR

LE MOUVEMENT DE L'AIGUILLE AIMANTÉE,

PAR

S. P. VAN DER STOK.

---

§ 1. Il y a seize ans, Lamont [1]) a essayé de coordonner tout ce qui était connu de l'influence de la Lune sur la direction et la force du magnétisme terrestre, mais sa tentative, comme presque toutes celles qui ont eu pour objet de jeter quelque jour sur cette matière, n'a guère été couronnée de succès. Depuis cette époque, toutefois, tant de nouvelles recherches ont été exécutées et tant de découvertes ont été faites, qu'une nouvelle combinaison des résultats les mieux définis est devenue nécessaire.

Le manque d'une théorie passable du magnétisme terrestre se fait vivement sentir dans l'étude de cette force: l'unité qu'une pareille théorie, même incomplète, est capable de donner nous fait ici entièrement défaut, et la combinaison des résultats est par suite un travail assez peu attrayant. Mais, d'un autre côté, on peut difficilement espérer qu'il surgira une théorie suffisamment en harmonie avec les faits, si les travaux dispersés et

---

[1]) *Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften*, 1864, t. II. 2, Munich.

souvent d'une étude pénible ne sont pas présentés au théoricien sous une forme concise. D'ailleurs, plusieurs questions simplement posées par Lamont peuvent aujourd'hui être résolues, et notre connaissance au sujet de la nature de ces phénomènes a donc fait des progrès réels.

Une des plus grandes difficultés auxquelles on se heurte dans les recherches concernant le magnétisme terrestre résulte du phénomène de la variation séculaire à laquelle tous les éléments sont soumis.

L'intervention de ce phénomène rend la question de l'influence de la Lune sur la *position* de l'aiguille aimantée, pour des périodes un peu longues, très difficile à décider: aussi difficile, par exemple, que celle de la variation annuelle de la position de l'aiguille de déclinaison, problème qui n'est encore résolu que d'une manière très imparfaite, malgré les nombreuses recherches auxquelles il a donné lieu [1]).

Si la période est longue et l'influence faible, comme cela est le cas, entre autres, pour l'influence des phases lunaires ou des distances lunaires sur la position de l'aiguille de déclinaison, la question devient souvent complètement insoluble, si exactes que soient les observations.

Comme exemple, je citerai les observations de déclinaison faites à Batavia et à Trévandrum, auxquelles la faiblesse des perturbations et la petite valeur de la variation séculaire donnent pourtant un incontestable avantage sur toutes les autres.

Dans le vol. I des *Trevandrum Observations* et dans le vol. III des *Batavia Observations* on trouve les déviations de position pour les quatre phases lunaires. Elles sont si petites, que même la correction qui doit être appliquée pour la variation séculaire durant les 29,5 jours sur lesquels la période s'étend est encore forte par rapport à ces déviations. Comme, en aucun autre lieu, les conditions pour une semblable recherche ne sont aussi favorables qu'à Batavia et à Trévandrum, et qu'en outre les obser-

[1]) *Arch. néerl.*, t. XIII.

vations de ces deux stations sont calculées avec une exactitude qui ailleurs n'est pas toujours atteinte, l'insignifiance et par conséquent l'incertitude des résultats obtenus expliquent suffisamment pourquoi je ne juge même pas dignes d'être publiées les données recueillies au sujet de cette question. Je m'en tiendrai aux variations qui ont lieu dans la période la plus courte, à savoir, dans le cours du jour lunaire. Renvoyant, pour la mention des premières tentatives de Kreil et de Broun et pour l'indication des plus anciennes publications, au mémoire ci-dessus cité de Lamont, je commencerai par donner un aperçu des méthodes qui ont été suivies dans l'examen de cette influence de l'angle horaire de la Lune.

La méthode la plus généralement employée est celle de Sabine. Un certain écart α, arbitrairement fixé, entre chaque observation isolée et la moyenne mensuelle calculée pour l'heure de cette observation, est considéré comme une perturbation et rejeté. Après cette première épuration, on calcule de nouveau les moyennes mensuelles et on supprime derechef les écarts supérieurs à α qui existent par rapport à ces nouvelles moyennes. En continuant de cette manière, on trouve pour chaque mois les valeurs dites normales, qui sont supposées faire connaître l'influence du Soleil durant le jour solaire, indépendamment des causes accidentelles [1]).

Les observations restées après la *première* épuration sont maintenant rendues, par la soustraction de ces normales, indépendantes de l'influence solaire, et les différences qui en résultent sont rangées suivant l'angle horaire de la Lune.

Si ces différences avaient été obtenues par la soustraction des moyennes correspondantes aux nombres, la somme de toutes les différences devrait naturellement être toujours nulle: mais, puisque les moyennes employées sont pour ainsi dire d'une autre espèce, il y aura généralement un reste. En supposant, par

[1]) L'influence du Soleil est alors regardée comme constante pendant la durée d'un mois. Pour cette raison, M. Broun opère sur des périodes de 14 jours.

exemple, que dans les deuxième, troisième etc. épurations il ait été rejeté plus d'écarts positifs que d'écarts négatifs, ce qui revient au même que si l'on avait éliminé seulement une certaine quantité de nombres trop forts, les normales définitives seront devenues d'autant plus petites et il y aura par conséquent un reste positif.

Ce reste est regardé par quelques-uns comme représentant l'influence de la Lune sur la position de l'aiguille aimantée (Melbourne, Philadelphie). M. Sabine lui-même, toujours réservé dans ses conclusions, ne s'est jamais prononcé, que je sache, sur la signification de ce reste.

Là où un pareil reste a été laissé dans le résultat, j'ai, dans ce qui suit, apporté la correction nécessaire pour rendre plus facile la comparaison entre les localités différentes.

La méthode qui vient d'être décrite a été appliquée, sur les traces de Sabine, à Melbourne et à Philadelphie.

A Batavia, on a jugé inutile d'introduire une correction pour les très faibles perturbations de la déclinaison: toutes les observations y sont employées et il n'est donc pas question d'un reste.

Une méthode toute différente a été suivie à Greenwich. Les distances de la courbe au zéro étaient directement relevées sur la photographie, où l'on avait d'avance marqué les moments des passages de la Lune, et divisé leur intervalle en 12 parties égales: les grandes perturbations étaient retouchées à la main par une seule et même personne. De cette manière, on évite l'interpolation aux heures lunaires, et l'élimination d'observations se trouve réduite à un minimum. Le grand avantage de cette méthode est toutefois balancé par l'absence de toute correction pour l'influence du Soleil, ce qui rend difficile l'étude de la marche durant les périodes des phases de la Lune, parce qu'alors l'influence du jour solaire n'est pas éliminée par l'arrangement suivant les heures. Mais rien ne s'opposerait à ce que les résultats obtenus fussent ensuite corrigés de l'influence du Soleil, par l'application de la marche moyenne durant le jour solaire.

Une troisième méthode a été employée par M. Allan Broun,

pour les observations de Trévandrum: ces observations, *non* corrigées des perturbations, sont ordonnées suivant le nombre 25, et, comme le jour lunaire ne compte qu'environ $24^h\,50^m$, après chaque série de 6 colonnes on saute *une* heure.

Une quatrième méthode a été suivie par moi, pour déduire l'influence de l'angle horaire de la Lune d'observations faites à une seule et même heure. Comme une même heure, pour un âge déterminé de la Lune, correspond toujours à une même heure lunaire, les observations sont rangées suivant le nombre 29,5. Si les observations sont faites à midi, il est clair que pour chaque nouvelle lune ce temps d'observation correspond toujours au commencement de la 1ère heure lunaire, pour chaque pleine lune au commencement de la 12e heure lunaire, etc.

J'ai cru devoir entrer dans quelques détails sur les méthodes suivies, parce qu'une méthode différente donne des résultats différents, au moins qualitativement: point resté jusqu'ici obscur et que je m'attacherai, en premier lieu, à éclaircir.

Une autre question, qu'il convient d'examiner avant de passer à la combinaison des données, est celle du point de vue auquel on veut se placer à l'égard des forces qui entrent en jeu. Notre ignorance des causes est ici si profonde, et toute théorie nous fait si complètement défaut, que ce point de vue, d'où dépend naturellement la forme dans laquelle seront donnés les résultats, reste en grande partie arbitraire.

L'hypothèse adoptée par Sabine et qu'il a suivie avec conséquence, se laisse définir ainsi: la Lune n'agit pas directement sur l'aiguille aimantée, mais elle fait varier la force terrestre en grandeur et en direction, et à cette seconde cause est dû le mouvement de l'aiguille. De cette manière de voir il résulte nécessairement:

1°. Que les déviations de la déclinaison n'ont pas besoin d'être en raison inverse de l'intensité horizontale, attendu que, dans l'hypothèse susdite, le plan vertical du méridien magnétique se meut lui-même par rapport à celui du méridien géographique.

Quand on se figure au contraire une force émanant directe-

ment du corps céleste, la déviation déterminée par cette force doit être d'autant plus petite que l'intensité magnétique horizontale est plus grande.

Dans un passage seulement, M. Sabine parle de l'intensité horizontale comme s'opposant aux variations de la déclinaison, mais nulle part il n'essaie d'exprimer ces variations en unités de force ou en mesure absolue.

2°. Que le but de l'élaboration doit alors être de trouver les changements d'inclinaison et de force totale qui sont capables d'expliquer les déviations observées, tandis que la force horizontale et la force verticale ne serviront que comme moyens d'y parvenir, et que la déclinaison, comme troisième élément indépendant, restera entièrement isolée.

A cet égard aussi, Sabine est conséquent: pour Hobarton, par exemple, on cherche en vain les variations des deux forces partielles aux heures lunaires, mais les variations de l'inclinaison et de la force totale sont données.

Lorsque, au contraire, on admet une influence directe, la force terrestre devient constante et n'est plus la force agissante, mais la force antagoniste; tandis qu'on peut alors, au moyen de la multiplication par la force horizontale, exprimer les variations de la déclinaison en mesure absolue, la force totale qui détermine la déviation n'est plus représentée par la formule

$$dF = \sqrt{dH^2 + dV^2}$$

qu'emploie Sabine, mais par

$$dF = \sqrt{dH^2 + dV^2 + dD^2}.$$

Aussi M. Airy, au rebours de M. Sabine, ne donne-t-il ni les variations de l'inclinaison ni celles de la force totale, mais, dans les observations de Greenwich, on trouve les déviations de l'aiguille de déclinaison exprimées en parties de l'intensité horizontale, et même la détermination du plan dans lequel devrait agir une force capable de rendre compte de ces déviations. Naturellement, il ne saurait être question d'un pareil plan

quand on se place au point de vue choisi par M. Sabine.

Comme il me semble que toutes les déviations ne pourraient être regardées comme dues à des variations de la force terrestre que s'il était permis de voir dans cette force elle-même la résultante d'actions extra-terrestres, et comme il y a peu de bonnes raisons à produire en faveur de cette hypothèse, je m'en suis tenu, pour la mise en œuvre des observations, au second des deux procédés qui viennent d'être décrits. D'ailleurs, la reconstruction des variations de la force totale et de l'inclinaison au moyen de celles de la force horizontale et de la force verticale, suivant les formules

$$\frac{dF}{F} = \frac{dV}{V} sin^2 i + \frac{dH}{H} cos^2 i$$

$$d i = \left(\frac{dV}{V} - \frac{dH}{H}\right) sin\, i\, cos\, i,$$

est plus facile que l'opération inverse, qui consiste à calculer dV et dH par les formules

$$\frac{dV}{H} = \frac{dF}{F} tg\, i + d\, i$$

$$\frac{dH}{H} = \frac{dF}{F} - tg\, i \,.\, d\, i,$$

quand les seules données sont $d\,F$ et $d\,i$.

En conséquence de l'hypothèse adoptée, à savoir, que la force déviatrice agit de l'extérieur et est indépendante de la grandeur de la force terrestre, je n'ai pas exprimé les déviations en parties de celle-ci, mais, pour rendre les comparaisons plus faciles, en unités anglaises de force absolue; afin d'éviter les décimales, la millionième partie de l'unité britannique a été prise pour étalon.

Qu'on se figure, au lieu d'observation pris pour origine, un système de coordonnées dont les trois axes soient respectivement dirigés du Sud au Nord, de l'Est à l'Ouest magnétiques et du centre de la Terre au Zénith; cela posé, les directions Nord, Ouest et Zénith,

ont partout été regardées comme positives, et c'est toujours le mouvement du pôle Nord qui a été considéré. Une déviation occidentale de l'aiguille de déclinaison est donc dite positive, indépendamment de la déclinaison et de l'hémisphère, et il en est de même de la force occidentale qui s'en déduit. Dans le tableau de la force horizontale, le signe *plus* indique que le pôle Nord du magnétomètre bifilaire est dévié vers le nord; dans le tableau de la force verticale, que le pôle Nord du magnétomètre-balance se meut vers le zénith. Pour passer d'une déviation δ de l'aiguille de déclinaison, exprimée en secondes, à la force correspondante, on a la formule

$$\delta \times tang\ 1'' \times \text{force horiz.},$$

ou, attendu que l'unité adoptée est un million de fois plus petite que l'unité anglaise, simplement

$$\delta \times 5 \times \text{force horiz.},$$

si la force horizontale est exprimée en mesure anglaise.

Il me paraît que ce mode uniforme d'expression rend le tableau des résultats plus simple et leur comparaison plus facile.

§ 2. *Influence moyenne de la Lune pendant l'année entière.*

Dans les tableaux I à V on trouve les résultats qu'il m'a été possible de rassembler, réduits à la forme adoptée.

Pour chacun des trois éléments, la période est essentiellement double, à l'inverse de ce qui a lieu pour le mouvement dû au Soleil, dont le plus grand facteur est déterminé par une période unique pendant la durée du jour.

Les déviations de l'aiguille de déclinaison sont les seules où le mouvement accuse nettement une différence de signe pour les deux hémisphères terrestres. Tandis que pour l'hémisphère nord on peut poser comme type la formule

$$A\ sin\ (2\ P + 90^{0})$$

(Toronto en fournit un bon exemple), le type qui s'applique à l'hémisphère sud est:

$$A \sin (2 P + 270°).$$

La loi que suit l'amplitude est beaucoup moins évidente. Lamont, dans le Mémoire ci-dessus cité, était arrivé à ce résultat: que l'influence croissait et décroissait avec la latitude. Nos tableaux II à V montrent clairement, toutefois, que la plus grande prudence est nécessaire dans la recherche d'une loi pour la grandeur du phénomène, attendu que les résultats relatifs à des lieux différents ne sont pas comparables. Lamont avait déjà cru remarquer qu'une différence dans la méthode de traitement donnait manifestement une différence dans les résultats, mais les données très incomplètes dont il disposait laissaient profondément cachée la cause de ce fait étrange. Il suffit de comparer Dublin, Greenwich et Kew, localités qui devraient toutes donner des courbes concordantes, pour voir combien cette différence est grande. Les détails nous manquent au sujet de la méthode qui a été suivie pour le calcul des observations de Dublin, et l'espace de temps sur lequel porte ce calcul, trois années, est aussi un peu court. Mais le désaccord entre Greenwich et Kew ne saurait être attribué qu'aux méthodes de réduction, et, d'après ce qui précède, la seule différence essentielle, sous ce rapport, concerne la manière dont les perturbations ont été éliminées pour les deux localités.

Lamont n'a pu arriver à cette conclusion, parce que, en 1864, les résultats de Greenwich ne lui étaient pas encore connus. Pour moi, bien que je n'aie pu me procurer les publications de Kreil sur cette matière, j'ose affirmer que les différences entre ses résultats et ceux de Sabine, qui d'abord avaient ébranlé la foi en l'existence d'une influence lunaire, doivent être imputées principalement aux perturbations. En effet, il n'est permis d'employer la méthode d'élimination de Sabine, que si les perturbations doivent être regardées comme des mouvements isolés de l'aiguille aimantée. Or, en admettant que cela soit réellement le cas pour beaucoup d'entre elles, le fait que les perturbations elles-mêmes sont soumises à une marche diurne prouve que, en

général, cette interprétation n'est pas justifiée [1]). Il conduit, bien plutôt, à se figurer de la manière suivante la production de ces écarts.

La force terrestre est la résultante de différentes forces agissant simultanément et se faisant équilibre, qui ont en grande partie leur origine dans la Terre même. Cet équilibre toutefois est variable et peut être tantôt plus stable, tantôt plus instable. Une *même* [2]) force externe, cosmique, provoquera donc soit une déviation moyenne, soit une déviation extraordinaire, suivant qu'elle trouve la Terre dans l'un ou dans l'autre de ces deux états. Tant que la marche diurne des déviations avait seulement été constatée pour le jour solaire, on pouvait supposer que la position du Soleil par rapport au méridien dominait ce degré de stabilité. Mais s'il est reconnu que la Lune exerce également une influence sur les déviations, inégale aux différentes heures du jour lunaire, cette supposition tombe et en même temps est trouvée la cause du défaut de comparabilité qui existe jusqu'ici entre les résultats. Les données nécessaires pour résoudre cette question doublement intéressante manquent partout, sauf à Batavia, où toutes les perturbations individuelles sont livrées à l'impression.

J'ai donc rangé suivant les heures lunaires les 1392 perturbations notées pendant les 2½ premières années des observations de déclinaison faites à Batavia: étendre cette coordination à toutes les années est un travail que le défaut de temps ne m'a pas permis d'exécuter et qui dépasse les forces particulières. Le résultat déduit d'un si petit nombre d'observations est d'ailleurs déjà assez net pour qu'il semble provisoirement inutile de multiplier les réductions.

Dans le tableau VI on trouve les perturbations, en secondes, aux heures lunaires. On voit que l'amplitude est près de 10 fois plus grande que celle déduite de l'ensemble des observations, et il est donc clair non seulement que la différence entre Green-

[1]) Voyez Buys Ballot, *Sectievergadering van het Prov. Utrechtsch Gen.*, 1866.

[2]) *Phil. Trans.*, 159, Part. 1, p. 423.

wich et Kew doit être imputée au mode d'élimination des pertubations, mais, en outre, que la grande amplitude, inconciliable avec la loi de Lamont, qu'accuse Batavia est due à ce que les perturbations n'y ont pas été éliminées. Comme l'amplitude d'une période est toujours plus grande lorsqu'elle est déduite d'un petit nombre d'observations que lorsqu'elle repose sur une base plus large, l'amplitude déduite des perturbations seules leur soit évaluée à environ huit fois celle qui résulte de l'ensemble des observations.

A la page 165 du vol. II des „*Observations*", on trouve que le nombre moyen des perturbations, par jour, est 2,04. En désignant donc par x l'amplitude obtenue en éliminant les perturbations, par y celle qui se déduit de toutes les observations, et par z celle que fournissent les perturbations seules, on a

$$24\,y = 21{,}96\,x + 2{,}04\,z;$$

mais nous avons estimé $z = 8\,y$, de sorte que:

$$x = 0{,}35\,y.$$

Comparée à celle des stations calculées par Sabine, l'amplitude des déviations à Batavia, données dans les tableaux II et III, serait donc trois fois trop grande, ce qui ferait disparaitre l'exception à la règle de Lamont. Mais, puisque la déviation regardée comme perturbation est nécessairement différente pour des lieux différents, il suit de ces recherches que, n'importe le mode de traitement appliqué aux observations, la comparabilité des amplitudes trouvées pour des lieux très distants sera toujours sujette à beaucoup d'incertitude.

Du tableau VI il paraît résulter que l'époque de la courbe ne subit pas de changement notable quand on élimine les perturbations. Jusqu'à ce que nos connaissances soient mieux assurées à ce sujet, l'époque de la formule périodique déduite des observations peut donc être regardée comme la donnée la plus certaine. Comme éclaircissement, je donne ici les formules doublement périodiques déduites du tableau III; de même que partout ailleurs, l'amplitude y est exprimée en millionièmes de l'unité anglaise.

Dublin.	397	*sin.* (2 P + 60°)
Kew	188	*sin.* (2 P + 52)
Greenwich.	298	*sin.* (2 P + 55)
Toronto	336	*sin.* (2 P + 91)
Philadelphie. . . .	260	*sin.* (2 P + 85)
Pékin	123	*sin.* (2 P + 105)
Trévandrum	— 105	*sin.* (2 P + 103)
Batavia	— 276	*sin.* (2 P + 85)
St. Hélène.	— 143	*sin.* (2 P + 140)
Le Cap	— 221	*sin.* (2 P + 110)
Melbourne	— 263	*sin.* (2 P + 81)
Hobarton.	— 278	*sin.* (2 P + 46)

Outre Batavia, Toronto aussi paraît ne pas suivre la règle de Lamont. Comme les observations de cette localité ont également été calculées par Sabine, la circonstance en question indique peut-être que l'amplitude n'est pas proportionnelle au sinus de la latitude, mais au sinus du double de la latitude: une station établie au-delà du 45e degré de latitude sud pourrait jeter beaucoup de jour sur ce point, la plus méridionale des stations actuelles, Hobarton, n'étant située qu'à 44°.

Les résultats obtenus par les déviations de la déclinaison à Trévandrum et à St. Hélène prouvent, toutefois, qu'il s'agit ici de rapports beaucoup plus complexes et qu'une théorie, ne tenant compte que des coordonnées du corps céleste et du lieu d'observation, pourra difficilement expliquer les phénomènes. En effet, bien que Trévandrum occupe une latitude nord de près de 9°, cette station se comporte, en moyenne, comme une localité située dans l'hémisphère sud. Ces déviations moyennes, consignées dans mes tableaux II et III, ne figurent pas comme telles dans l'ouvrage de M. Broun. Les déviations ayant un caractère tout différent dans les différents mois, ce savant a pensé que le calcul de moyennes pour l'année entière n'avait aucune signification. C'est là une opinion que je ne puis partager. Pourvu qu'on sache de quels éléments elles ont été déduites, les valeurs

moyennes ont toujours une certaine signification, au moins théorique. Les résultats que je donne ont été calculés au moyen des formules mensuelles communiquées par M. Broun. Ils montrent que la situation de l'équateur magnétique joue ici un grand rôle: à 77° de longitude est, cet équateur passe à environ 15° au nord de l'équateur géographique, de sorte que Trévandrum se trouve à une latitude magnétique sud d'environ 6°.

Une théorie complète ne sera donc possible que lorsqu'une hypothèse satisfaisante aura été formée au sujet de la signification et du déplacement de l'équateur magnétique.

Peut-être est-ce à cette même influence qu'il faut attribuer le caractère tout à fait anomal de St.-Hélène. Cette station est située, en effet, en un point où l'équateur magnétique s'incline brusquement et fortement par rapport aux parallèles. Quant au caractère ambigu de St. Hélène, il ressort de la valeur de 140° qu'y prend l'époque dans la formule, valeur intermédiaire entre $\frac{\pi}{2}$ et π, qui sont respectivement les époques typiques pour l'hémisphère nord et l'hémisphère sud.

Pour ce qui regarde enfin les écarts de l'époque par rapport à sa valeur typique, c'est-à-dire les différences dans l'heure où se produit la déviation maximum, les faits ne semblent pas confirmer l'opinion énoncée par Lamont, suivant laquelle le moment du maximum différerait d'autant plus du moment du passage de la Lune, que le lieu d'observation est plus éloigné de l'équateur. Même si l'on ne tenait pas compte de la station anomale de St.-Hélène, les observations de Toronto et du Cap contrediraient encore cette conclusion. On serait plutôt porté à admettre que les écarts en question sont en rapport avec la déclinaison. Là où la déclinaison est grande, comme à Dublin, Kew, Greenwich et le Cap, l'époque s'écarte le plus de 90°, tandis qu'à Toronto et à Philadelphie, où la déclinaison est petite, la formule de Bessel donne presque exactement l'époque typique.

Ainsi, en tant qu'il soit possible de tirer une conclusion des

formules données, dans l'hémisphère nord une déclinaison *ouest* et dans l'hemisphère sud une déclinaison *est* feraient retarder le moment du maximum, et réciproquement. Effectivement, au Cap, le maximum survient plus tôt et l'aiguille décline fortement à l'ouest; à Hobarton, où la déclinaison est à l'est, le maximum se produit plus tard. Les données sont toutefois insuffisantes pour trancher la question.

Encore plus incomplets sont les résultats relatifs à la force horizontale. Les nombres du tableau III montrent une allure beaucoup moins régulière que ceux de la déclinaison: l'amplitude est partout plus petite et par conséquent la période entière moins nettement déterminée.

De l'irrégularité des déviations il suit qu'on ne peut pas non plus attacher ici beaucoup d'importance à l'époque.

Les formules doublement périodiques de Bessel:

Dublin	180 *sin.* (2 P + 357°)
Kew	157 *sin.* (2 P + 25)
Greenwich	223 *sin.* (2 P + 34)
Toronto	101 *sin.* (2 P + 14)
Philadelphie	92 *sin.* (2 P + 39)
St. Hélène.	95 *sin.* (2 P + 132)
Le Cap	117 *sin.* (2 P + 30)
Melbourne	61 *sin.* (2 P + 339)
Hobarton	87 *sin.* (2 P + 329)

autorisent toutefois la conclusion que, là où la déviation occidentale de la déclinaison est plus grande (v. p. 344), la variation de la force boréale devient plus petite. Toronto, Philadelphie et les deux stations les plus méridionales en fournissent la preuve, de sorte qu'on peut admettre que la déviation de la force boréale est proportionnelle au cosinus du double de la latitude, d'autant plus que Kew est ici plus grand que Toronto, tandis que pour la déclinaison c'était l'inverse. Si c'est la même force qui met en mouvement les deux aimants perpendiculaires entre eux, la formule typique pour la force boréale doit différer de 90° en

époque de celle pour la force occidentale. Effectivement, la station qui pour la force occidentale satisfait le mieux à ce type (Toronto) donne ici également une époque différant peu de zéro (moins d'une demi-heure). Toujours à l'exception de St. Hélène, les autres stations s'accordent assez bien avec la formule typique

$$A \sin 2 P;$$

les déviations de cette époque typique sont alors, pour une déclinaison ouest, dans les *deux* hémisphères (p. e. à Greenwich et au Cap) positives, c'est-à-dire que le moment de la déviation maximum est avancé; tandis que pour une déclinaison est (Melbourne et Hobarton) elles sont toujours négatives, c'est-à-dire que le maximum de la force se produit plus tard.

Les résultats de ces considérations au sujet des deux éléments de la force lunaire se laissent donc résumer en admettant que la forée occidentale exercée sur le pôle nord soit à peu près représentée par la formule

$$B \sin 2 \varphi \sin (2 P + 90^{\circ} - k \Delta \sin \varphi),$$

où Δ désigne la déclinaison, les déviations occidentales étant regardées comme positives. B et k sont des constantes pour la Terre entière.

La force boréale peut alors être exprimée par la formule

$$B' \cos 2 \varphi \sin (2 P + k' \Delta \cos \varphi).$$

Il va sans dire que ces formules n'ont aucune prétention à l'exactitude, mais doivent seulement être considérées comme les formules empiriques qui reproduisent le mieux les remarques faites à propos des tableaux. Elles expriment:

1°. que, pour la force occidentale, tant l'amplitude que la déviation de l'époque occasionnée par la déclinaison changent de signe avec la latitude, tandis que,

2°. pour la force boréale, tout est indépendant du signe de la latitude;

3°. que l'amplitude de la force occidentale croît depuis l'équa-

teur jusqu'à la latitude de 45°, pour décroître ensuite, tandis que la force boréale suit une marche inverse.

Ces trois propositions ne sont toutefois pas applicables aux localités situées tout près de l'équateur.

Pour compléter ce qui précède, je donne encore les formules relatives à la force verticale:

Greenwich I. . . .	112 *sin.* (2 P + 210°)
Greenwich II . . .	226 *sin.* (2 P + 224)
Kew	104 *sin.* (2 P + 178)
Toronto	43 *sin.* (2 P + 150)
Philadelphie	58 *sin.* (2 P + 308)
St. Hélène.	108 *sin.* (2 P + 335)
Le Cap	95 *sin.* (2 P + 136)
Hobarton	76 *sin.* (2 P + 177)

De même que pour la force horizontale, les stations situées à environ 45° de latitude ont, dans les deux hémisphères, une petite amplitude. Si l'on considère Kew et Toronto, la déclinaison paraît avoir peu d'influence sur l'époque, de sorte que nous pouvons donner comme résultat la formule générale:

$$B'' \cos 2\varphi \sin (2P + 180° + k'' \cos \varphi).$$

§ 3. *La force totale dans le plan horizontal.*

Dans l'espoir que la combinaison des deux forces qui agissent dans le plan horizontal ferait ressortir quelques propriétés générales, auxquelles les éléments isolés ne pouvaient aisément conduire, j'ai aussi calculé, au moyen des tableaux III et IV, la force totale, d'après les formules

$$F = \sqrt{D^2 + H^2}$$

$$tg\, \varphi = \frac{H}{D}.$$

Cet examen m'a paru offrir d'autant plus d'intérêt qu'on a déduit, des données obtenues pour Greenwich [1]), que cette force

[1]) *Philos. Trans.*, Vol. 159, Part I, p. 423. *The Astronomer royal on the diurnal and annual inequalities of terrestrial Magnetism.*

totale serait située dans un azimut invariable, résultat qui aurait nécessairement une grande importance au point de vue de l'hypothèse à former.

L'azimut calculé à l'aide des tableaux III et IV serait compté à partir de la ligne Est magn.—Ouest magn., c'est-à-dire à partir de la direction indiquée par le pôle nord de l'aiguille bifilaire. Dans le tableau VII, qui donne pour chaque station la force totale et son azimut, cet azimut est toutefois compté à partir du méridien magnétique, en passant par l'est, ainsi qu'il est d'usage en astronomie. Les minima sont indiqués par un petit trait, et, comme on pouvait s'y attendre, il se dévoile une quadruple période, qui est nettement accusée pour toutes les stations. La régularité des résultats est évidemment beaucoup accrue par cette combinaison. Cela se reconnaît aussi à l'azimut, qui suit partout une marche très régulière: dans la durée du jour lunaire, la force totale accomplit deux révolutions entières, et pendant chaque révolution elle parcourt deux fois une valeur maximum et une valeur minimum. Si pour Kew et Greenwich la grandeur de la force diffère encore assez notablement, la direction est maintenant devenue presque entièrement la même pour ces deux stations. La force n'a donc pas une direction constante, mais fait régulièrement deux tours complets dans le cours du jour lunaire.

Pour éliminer encore une fois, autant que possible, les perturbations accidentelles, j'ai ramené dans le tableau VIII les deux révolutions à une seule, en combinant tous les nombres qui dans le tableau VII diffèrent entre eux de 12 heures. Comme l'azimut est déterminé d'autant plus nettement que la force est plus grande, je lui ai toujours attribué, dans la fixation de la valeur intermédiaire, le poids de la force correspondante, tandis que pour les forces elles-mêmes j'ai simplement pris la moyenne.

La planche VIII donne une représentation graphique des résultats obtenus de cette manière. La ligne O M M y indique la direction du méridien magnétique, la ligne O G M celle du méridien géographique.

Par ces tracés, il saute immédiatement aux yeux que, dans l'hémisphère nord, la force totale tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, dans l'hémisphère sud, en sens opposé. A 0^h et à 6^h la force totale est, dans la plupart des stations, perpendiculaire au *méridien géographique.*

Cette règle n'est contredite que par St. Hélène et le Cap. Pour les autres stations, la loi est aussi nette qu'on peut l'espérer, eu égard à la petitesse des forces mesurées et à l'incertitude des nombres. De même que précédemment, nous arrivons donc à ce résultat, que la grandeur de la déclinaison magnétique influence l'action que la Lune exerce sur l'aiguille.

St. Hélène seule fait de nouveau une remarquable exception. Des tableaux VII et VIII il ressort déjà que dans cette station la force ne tourne pas régulièrement, comme dans toutes les autres, mais que pendant un temps notable elle conserve à peu près le même azimut. Le tracé montre que, durant les heures 0, 1, 2, 3, le sens de la rotation est le même que dans toutes les stations australes: mais de 3 à 5 heures la force tourne comme dans l'hémisphère nord, puis de 5 à 9 de nouveau comme au début, pour reprendre de 9 à 11 la rotation positive. La symétrie des deux boucles qu'on voit dans la figure et la régularité qu'on remarque dans les nombres du tableau VIII font présumer que ce caractère hybride n'est pas imputable à des causes accidentelles.

Les irrégularités qu'offrent les tracés de quelques stations peuvent être évitées en calculant, non pas à l'aide des nombres eux-mêmes, mais à l'aide des formules de Bessel, qui représentent ces nombres au mieux, la courbe dont la force totale est le rayon vecteur.

Prenons, en effet, pour axe des x la ligne magnétique Est-Ouest, pour axe des y la ligne magnétique Sud-Nord, et soit donnée la force boréale par la formule

$$A \sin (2P + C),$$

la force occidentale par

$$B \sin (2P + C');$$

les composantes de la force totale sont alors

$$A \sin (2P + C) = Y$$

$$B \sin (2P + C') = X.$$

En éliminant de ces deux équations la quantité $2P$, l'angle horaire, on obtient

$$A^2 X^2 + B^2 Y^2 - 2ABXY \cos (C' - C) = A^2 B^2 \sin^2 (C' - C),$$

équation d'une ellipse, dont les axes sont, comme on sait,

$$a^2 = \frac{2A^2B^2 \sin^2 (C' - C) \cos 2\alpha}{(A^2 + B^2) \cos 2\alpha + A^2 - B^2} \quad b^2 = \frac{2A^2B^2 \sin^2 (C' - C) \cos 2\alpha}{(A^2 + B^2) \cos 2\alpha - (A^2 - B^2)}.$$

L'angle α est l'inclinaison de l'axe de l'ellipse sur la droite prise pour axe des x; cet angle est déterminé par l'équation

$$tg\, 2\alpha = \frac{-AB \cos (C' - C)}{A^2 B^2}.$$

Comme moyen de contrôle facile des valeurs calculées pour les axes, on peut se servir de l'équation:

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{A^2 + B^2}{A^2 B^2 \sin^2 (C' - C)}.$$

Dans le tableau IX on trouve les éléments calculés de l'ellipse et les angles qui déterminent sa situation par rapport au méridien. La distance focale y est désignée par f, l'excentricité par e, de sorte qu'on a:

$$f = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

L'azimut du grand axe, compté à partir du méridien magnétique, est donné dans la colonne α; l'azimut du grand axe, compté à partir du méridien géographique, dans la colonne β.

Il ressort de ce tableau que pour toutes les stations dont il s'agit, sauf pour St. Hélène et le Cap, la force maximum fait avec le méridien géographique un angle qui diffère peu de 90°.

Pour St. Hélène, l'excentricité est si grande que l'ellipse de la force se transforme presque en une ligne droite: ici, on pourrait donc parler d'une force agissant dans une direction fixe.

§ 4. Bien qu'il ne soit évidemment pas possible d'établir une théorie de l'influence de la Lune sur le magnétisme terrestre avant d'avoir élaboré la théorie de ce magnétisme lui-même et expliqué la dépendance qui existe entre l'équateur magnétique et la position du Soleil, il ne sera peut-être pas entièrement inutile d'examiner succinctement en quoi les formules, qui expriment les coordonnées relatives d'un astre par rapport à un lieu d'observation, se trouvent en défaut.

Prenons, comme précédemment, la tangente au parallèle pour axe des x, la tangente au méridien pour axe des y, enfin la verticale pour axe des z, en considérant comme positives respectivement les directions Ouest, Nord et vers le Zénith. Il est facile de montrer que les cosinus des angles formés avec les trois axes par la ligne qui joint le lieu à l'astre sont donnés par les équations:

$$\cos a = \frac{R}{\varrho} \cos \delta . \sin P = \frac{R}{\varrho} \cos h . \sin A,$$

$$\cos b = \frac{R}{\varrho} (\cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos P) = -\frac{R}{\varrho} \cos h \cos A,$$

$$\cos c = \frac{R}{\varrho} \left(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos P - \frac{r}{R} \right) = \frac{R}{\varrho} \sin h - \frac{r}{\varrho}.$$

où les symboles employés ont la signification suivante:

R, distance de l'astre au centre de la Terre,

ϱ, distance de l'astre au lieu d'observation,

φ, latitude géographique,

δ, déclinaison de l'astre,

P, angle horaire,

h, altitude,

A, azimut,

r, rayon terrestre.

Si la force émanant de la Lune est en raison inverse de la

$n^{ième}$ puissance de la distance, sa composante suivant l'axe des x (Est-Ouest) sera

$$k \frac{R}{\varrho^{n+1}} \cos \delta \sin P,$$

k étant une constante. Il en résulte immédiatement qu'une force dirigée vers l'astre ne peut jamais donner l'explication du mouvement d'une aiguille de déclinaison. En effet, la formule indique le moment de la force avec laquelle est mise en mouvement une aiguille de déclinaison dont le moment magnétique est égal à l'unité, dans un lieu où la déclinaison est très petite. Or, d'après la formule, ce mouvement serait à période simple et indépendant de la latitude géographique, tandis que les tableaux montrent justement le contraire et que, pour l'aiguille de déclinaison, il faut chercher une formule de la forme

$$k \,.\, f(\varrho)\, \psi(\delta) \sin n\varphi \cos 2\, P.$$

La même difficulté se présente dans la théorie du flux et du reflux de la mer. MM. Thomson et Tait, dans leur *Handbuch der Theoretischen Physik*, t. I, part. II, p. 365, font la remarque suivante:

„On peut se figurer que l'élévation et l'abaissement de l'eau, en un point quelconque de la surface terrestre, soient produits en enlevant l'une des moitiés du corps perturbateur et la fixant du côté opposé, à la même distance du centre. Nous verrons que cette même hypothèse (ou une hypothèse équivalente) *est indispensable pour le flux diurne évanescent de* Laplace, sur un sphéroïde solide recouvert d'un océan ayant partout la même profondeur. D'un autre côté, il apparaîtra bientôt que cette hypothèse est dans un accord très étroit avec les conditions réellement existantes, en tant qu'il s'agit de l'établissement de la théorie statique".

Assurément, la météorologie peut toujours sans hésitation emprunter une hypothèse à la science, infiniment plus parfaite, de l'astronomie. Laissant donc de côté la signification et la

valeur de cette hypothèse, il m'a paru intéressant de l'appliquer au cas actuel.

Soit ze la distance zénithale: la composante de la force suivant l'axe des x est alors

pour la Lune

$$k \frac{R}{\varrho^{n+1}} \sin ze \sin A,$$

pour l'anti-Lune

$$k \frac{R}{\varrho'^{(n+1)}} \sin (180^\circ - ze) \sin (180^\circ + A);$$

la force totale est donc

$$k \, . \, R \sin ze \, . \sin A \left(\varrho^{-(n+1)} - \varrho'^{-(n+1)}\right) \ldots \ldots \quad (1)$$

Or, on a

$$\varrho = \sqrt{R^2 + r^2 - 2 r R \cos ze}$$

$$\varrho' = \sqrt{R^2 + r^2 + 2 r R \cos ze}.$$

$$\varrho^{-(n+1)} = R^{-(n+1)} + (n+1) R^{-(n+2)} r \cos ze$$

$$\varrho'^{-(n+1)} = R^{-(n+1)} - (n+1) R^{-(n+2)} r \cos ze.$$

$$\left.\begin{array}{l} \varrho^{-(n+1)} - \varrho'^{-(n+1)} = 2(n+1) R^{-(n+2)} r \cos ze \\ \varrho^{-(n+1)} + \varrho'^{-(n+1)} = 2 R^{-(n+1)} \end{array}\right\}, \quad (2)$$

de sorte que la formule (1) devient:

$$2 k (n+1) R^{-(n+1)} r \sin ze \cos ze \sin A.$$

Mais, des formules ci-dessus données pour les cosinus, il suit

$$\sin ze \sin A = \cos \delta . \sin P$$

$$\cos ze = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos P.$$

$$\sin ze \cos ze \sin A = \sin \delta \cos \delta \sin \varphi \sin P + \cos^2 \delta \cos \varphi \sin P \cos P.$$

La composante de la force suivant l'axe des x devient donc:

$$k(n+1)\,R^{-(n+1)}\,r\,(\sin.2\,\delta\,\sin\varphi\,\sin.P+\cos^2\delta\,\cos\varphi\,\sin 2\,P).\quad (3)$$

La composante suivant l'axe des y se trouve de la même manière:

pour la Lune

$$k - \frac{R}{\varrho^{(n+1)}}\sin z\,e\cos A,$$

pour l'anti-Lune

$$-k\,\frac{R}{\varrho'^{(n+1)}}\sin(180^\circ - z\,e)\cos(180 + A),$$

pour la force totale

$$k\,.\,R\,.\sin z\,e\cos A\,(\varrho'^{-(n+1)} - \varrho^{-(n+1)}),$$

ou, réduite en coordonnées équatoriales,

$$k(n+1)\,R^{-(n+1)}\,r\,(\sin 2\,\varphi\,\sin^2\delta + \\ +\cos 2\,\varphi\,\sin 2\,\delta\cos P - \sin 2\,\varphi\cos^2\delta\cos^2 P)\,.\,.\,.\quad (4)$$

La force totale suivant l'axe des z devient

$$k\,R\cos z\,e\,(\varrho^{-(n+1)}) - \varrho'^{-(n+1)})$$

$$2\,k\,(n+1)\,R^{-(n+1)}\,r\cos^2 z\,e\,.\,.\,.\,.\ \text{ou}$$

$$k\,(n+1)\,R^{-(n+1)}\,r\,(2\sin^2\varphi\sin^2\delta + \cos^2\varphi\cos^2\delta + \\ +\sin 2\,\varphi\sin 2\,\delta\cos P + \cos^2\varphi\cos^2\delta\cos 2\,P),\,.\,.\,.\quad (5)$$

si l'on considère que

$$\cos^2 P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\,P.$$

Comme nous n'avons en vue que les termes qui sont périodiques avec l'angle horaire de la Lune, et que dans le traitement

des observations il n'a pas été tenu compte de la déclinaison lunaire, de sorte que celle-ci devient nulle en moyenne, nous trouvons simplement pour les trois composantes (3), (4) et (5):

$$k\,(n+1)\,R^{-(n+1)}\,r\cos\varphi\sin 2P,\ \text{suivant l'axe des } x,$$

$$-\tfrac{1}{2}\,k\,(n+1)\,R^{-(n+1)}\,r\sin 2\varphi\cos 2P,\ \text{suivant l'axe des } y,$$

$$k\,(n+1)\,R^{-(n+1)}\,r\cos^2\varphi\cos 2P,\ \text{suivant l'axe des } z.$$

Si l'on compare ces formules avec les expressions typiques que nous avons précédemment déduites des observations, on reconnaît immédiatement que la première formule ne peut jamais rendre raison du mouvement de l'aiguille de déclinaison, ainsi que cela devrait être le cas si une force déviatrice directe était en jeu.

Mais la seconde formule, celle de la composante dans la direction Sud-Nord, s'accorde très bien avec la formule que nous avons admise pour les déviations de la déclinaison, et une explication de ces déviations peut donc être donnée en posant simplement cette hypothèse:

L'influence de la Lune donne naissance à des courants, dont l'intensité et la direction sont déterminées par les composantes de la force.

En effet, un courant dirigé suivant le méridien fera dévier l'aiguille de déclinaison (la déclinaison a toujours été prise égale à zéro), et un courant dans le sens du parallèle déviera l'aiguille bifilaire. Du signe de la formule pour les déviations de la déclinaison,

$$-\tfrac{1}{2}\,k\,(n+1)\,R^{-(n+1)}\,r\sin 2\varphi\,.\,\sin(2P+90^\circ),$$

il suit alors que, si la composante de la force est positive, il se produit un courant de direction négative, car, pour une latitude nord, c'est-à-dire pour sin 2φ positif, l'expression ci-dessus doit être positive lorsque $P = 0$. Les intensités des

courants excités peuvent donc être représentées par les formules suivantes:

pour la déviation de l'aiguille de déclinaison

$$\bar{\omega} R^{-(n+1)} r \sin 2\varphi \sin (2P + 90°),$$

pour la déviation de l'aiguille bifilaire

$$-2\bar{\omega} R^{-(n+1)} r \cos\varphi \sin 2P,$$

en désignant par $-m$ le coefficient d'intensité et en posant:

$$-km(n+1) = 2\omega.$$

La valeur de n doit être déterminée au moyen d'observations concernant la marche diurne pendant les périodes du Périgée et de l'Apogée.

Pour deux points seulement, Batavia et Trévandrum, il a été fait des recherches à ce sujet.

Dans les Trevandrum *Observations*, t. I, p. 139, on trouve pour le rapport des deux distances de la Lune

$$1{,}07,$$

et pour le rapport des amplitudes des déviations de la déclinaison

$$1{,}24.$$

Or on a

$$(1{,}07)^3 = 1{,}225,$$

et par conséquent

$$n + 1 = 3.$$

Si, dans les Batavia *Observations*, t. III, on prend les sommes des déviations pour les périodes du Périgée et de l'Apogée, on trouve pour leur rapport

$$1{,}234.$$

Le rapport des amplitudes des formules doublement periodiques calculées à l'aide de ces mêmes nombres est

1,252.

Ainsi, le premier résultat se trouve confirmé.

Prenons pour unité de longueur, afin d'éviter les nombres trop grands, la distance de la Terre à la Lune, qui peut être supposée égale à 60 rayons terrestres; la force déviatrice devient alors, sur une aiguille aimantée (ayant pour moment l'unité) qui est située dans le méridien,

$$\bar{\omega} \frac{r}{R} \sin 2\varphi \sin(2P + 90^\circ) \dots\dots\dots\dots (6)$$

et sur une aiguille qui est suspendue dans la direction Est-Ouest,

$$-2\bar{\omega} \frac{r}{R} \cos\varphi \sin 2P \dots\dots\dots\dots (7)$$

Le signe doit en effet être changé dans cette dernière formule, parce qu'un courant de direction négative fait subir une déviation positive (nord) au pôle nord de l'aiguille bifilaire.

Comme k est la force qui excite le courant pour l'unité de distance, $\bar{\omega}$ est la force de déviation magnétique qui est excitée par la force $^3/_2\, k$.

En comparant ces formules (6) et (7) avec les formules empiriques données précèdemment, la valeur de $\bar{\omega}$ pourrait être déterminée par les expressions

$$\bar{\omega} = \frac{A}{\sin 2\varphi} 60 \qquad \bar{\omega} = \frac{B}{2\cos\varphi} 60,$$

A désignant l'amplitude de la formule de Bessel pour les déviations de la déclinaison, B celle de la force horizontale.

Si l'on applique ces expressions à Toronto, on trouve pour la première valeur de $\bar{\omega}$ un nombre environ 5 fois plus fort que pour la seconde.

Il est vrai que nous avons attribué au coefficient d'intensité

une même grandeur pour les deux directions perpendiculaires entre elles, tandis qu'il serait très possible que ce coefficient changeât avec l'azimut.

Supposons maintenant que l'aiguille de déclinaison ait une déclinaison Δ à l'ouest du méridien; les forces qui agissent sur les deux aiguilles sont alors respectivement

$$X \cos \Delta - Y \sin \Delta$$
$$X \sin \Delta + Y \cos \Delta.$$

Si dans ces expressions on substitue les valeurs de X et de Y et qu'on réduise les deux termes à un seul, la force déviatrice devient:

pour l'aiguille de déclinaison:

$$A \sin (2 P + M) \quad , \quad \text{où}$$
$$A^2 = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \bar{\omega}^2 \left(\cos^2 \Delta \sin^2 2 \varphi + 4 \sin^2 \Delta \cos^2 \varphi\right)$$
$$tg\, M = - \cot \Delta \sin \varphi ,$$

et pour l'aiguille bifilaire:

$$A^1 \sin . (2 P + M^1) \quad , \quad \text{où}$$
$$A^{1\ 2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \omega^2 \left(\sin^2 \Delta \sin^2 \varphi + 4 \cos^2 \Delta \cos^2 \varphi\right)$$
$$tg\, M^1 = tg\, \Delta \sin \varphi.$$

L'époque des déviations de la déclinaison M serait donc située, pour l'hémisphère nord, dans le second quadrant. Ce résultat ne s'accorde *pas* avec les observations, qui dans cet hémisphère indiquent justement une époque d'autant plus petite que la déclinaison occidentale devient plus grande.

Pour remédier à ce défaut, on serait donc obligé de donner au coefficient m pour la direction Est-Ouest un signe contraire; mais alors la formule (7) s'accorde mal avec le tableau IV, où, pour $P = 3$ heures, toutes les déviations sont positives, sauf en ce qui concerne la station toujours anomale de St.-Hélène.

Il n'y a donc pas lieu de développer davantage cette théorie,

qui au premier abord semble s'adapter assez bien aux faits. Elle laisserait d'ailleurs sans explication les variations de la force verticale, car des courants compris dans un plan horizontal ne peuvent mettre en mouvement une aiguille verticale.

§ 5. *Influence du Soleil.* Les premiers investigateurs, Kreil et Broun, avaient déjà trouvé que la position du Soleil durant l'année exerce une influence très nette sur le mouvement communiqué à l'aiguille par l'action de la Lune. Notre tableau X, où sont réunis pour sept stations les résultats relatifs à la déclinaison et pour trois ceux qui se rapportent à la force horizontale, fait suffisamment ressortir la grandeur de cette influence, bien que les données soient encore trop peu nombreuses pour qu'on puisse en tirer des conclusions plus précises. Tant l'amplitude que l'époque varient avec la position du Soleil. Comme, dans le tableau X, les mots Eté et Hiver correspondent à ceux de déclinaison solaire boréale et australe, on voit que l'amplitude croît dans l'hémisphère nord en même temps qu'elle décroît dans l'hémisphère sud. La température ne peut donc pas être la cause de ce phénomène, car, à Batavia, la variation annuelle de la température est non seulement très faible, mais aussi, tout comme dans l'hémisphère nord, positive d'avril en septembre. Un examen spécial, institué à Trévandrum et à Batavia, a fourni au moins un résultat négatif, en montrant où la cause ne doit *pas* être cherchée.

A Trévandrum, on a calculé pour chaque mois séparément la déviation de la déclinaison magnétique aux heures lunaires; à Batavia, on l'a calculée pour des intervalles égaux de la déclinaison du Soleil. L'une et l'autre station montrent que la différence d'amplitude peut devenir considérable et qu'entre sa grandeur et la distance zénithale du Soleil aucun rapport simple ne se laisse établir. Ni la lumière ni la chaleur ne peut donc être la cause déterminante, et celle-ci ne peut résider non plus dans une action dépendant de la composante verticale de la force solaire. A Batavia, en effet, le mouvement est le plus grand lorsque le Soleil a le maximum de déclinaison australe, et non lorsque

la déclinaison australe du Soleil est égale à la latitude sud du lieu [1]). Des résultats obtenus pour Trévandrum, station située près du méridien magnétique, il ressort que, si même l'amplitude est proportionnelle à un facteur variable avec la position du Soleil, ce facteur doit pouvoir prendre aussi bien des valeurs positives que négatives. Là, en effet, l'amplitude est très grande en janvier, et le mouvement présente alors un caractère tout à fait austral; mais, en juillet, le caractère est nettement boréal, tandis que l'amplitude est moins grande.

Pour les trois stations qui en offraient les moyens, on a calculé (voir tabl. IX) les éléments de l'ellipse de la force en été et en hiver. Pour toutes les trois, Dublin, Philadelphie et Melbourne, l'excentricité est sensiblement plus forte lorsque la déclinaison du Soleil est australe que lorsqu'elle est boréale.

L'axe de l'ellipse tourne, pour toutes les stations boréales, à gauche quand la déclinaison du Soleil devient boréale, à droite, quand elle devient australe. A Melbourne, c'est l'inverse.

Mieux encore que par l'arrangement des observations suivant les différentes positions annuelles du Soleil, l'influence de la position de cet astre est mise en évidence par la découverte de M. Allan Broun, concernant l'effet du jour et de la nuit. M. Broun ayant mis à part les heures lunaires qui coïncidaient avec des heures de jour, trouva que le mouvement était notablement plus grand pendant le jour que pendant la nuit.

Pour les localités telles que Trévandrum et Batavia, où le mouvement de l'aiguille aux heures lunaires est connu pour les différentes phases de la Lune, un pareil examen spécial n'est pas nécessaire, du moins si, comme dans ces deux stations, la position moyenne de l'aiguille ne diffère pas de l'une à l'autre de ces périodes.

En effet, des quatre courbes en question se laisse facilement déduire la marche du mouvement, non seulement pour le jour et pour la nuit, mais pour une distance zénithale quelconque.

---

[1]) Batavia *Observations*, Vol. III, tabl. 269.

Le jour lunaire coïncide en effet avec le jour solaire à l'époque de la Nouvelle lune, en diffère de 6 heures pour le Premier quartier, de 12 heures pour la Pleine lune et de 18 heures pour le Dernier quartier.

En supposant maintenant que le Soleil, à Batavia par exemple, se lève en moyenne à 6 heures, et qu'on possède les courbes pour chacune des quatre phases, ces courbes pourront être représentées algébriquement par les équations

$$\text{●}\,\Sigma_{23}^{0}\,\delta\Delta = 0\,;\ \text{☽}\,\Sigma_{23}^{0}\,\delta\Delta = 0\,;\ \odot\,\Sigma_{23}^{0}\,\delta\Delta = 0\,;\ \text{☾}\,\Sigma_{23}^{0}\,\delta\Delta = 0.$$

Pour les quatre positions du Soleil qui correspondent à Six heures du matin, Midi, Six heures du soir et Minuit (et aux deux heures voisines de chacune de celles-ci), on a alors les équations :

$$\text{●}\,\Sigma_{20}^{16} + \text{☽}\,\Sigma_{14}^{10} + \odot\,\Sigma_{8}^{4} + \text{☽}\,\Sigma_{2}^{22} = 0, \text{ pour le Lever du Soleil,}$$

$$\text{●}\,\Sigma_{2}^{22} + \text{☽}\,\Sigma_{20}^{16} + \odot\,\Sigma_{14}^{10} + \text{☽}\,\Sigma_{8}^{4} = 0, \text{ pour Midi,}$$

$$\text{●}\,\Sigma_{8}^{4} + \text{☽}\,\Sigma_{2}^{22} + \odot\,\Sigma_{20}^{16} + \text{☽}\,\Sigma_{14}^{10} = 0, \text{ pour le Coucher du Sol.,}$$

$$\text{●}\,\Sigma_{14}^{10} + \text{☽}\,\Sigma_{8}^{4} + \odot\,\Sigma_{2}^{22} + \text{☽}\,\Sigma_{20}^{16} = 0, \text{ pour Minuit.}$$

De cette manière, il reste quatre heures pour chaque jour, mais comme celles-ci tombent justement vers le moment de l'inversion de signe, l'équation n'en peut pas moins être posée. Pour le Jour et la Nuit, on trouve:

$$\frac{1}{2}\left[\text{●}\,\Sigma_{5}^{18} + \text{☽}\,\Sigma_{23}^{12} + \odot\,\Sigma_{17}^{6} + \text{☽}\,\Sigma_{11}^{0}\right] = 0, \text{ pour le Jour,}$$

$$\frac{1}{2}\left[\text{●}\,\Sigma_{17}^{6} + \text{☽}\,\Sigma_{11}^{0} + \odot\,\Sigma_{5}^{18} + \text{☽}\,\Sigma_{23}^{12}\right] = 0, \text{ pour la Nuit.}$$

C'est d'après ces 6 équations qu'a été calculé le tableau XI, à l'aide des observations faites à Batavia pour les périodes des phases lunaires; dans les deux dernières colonnes se trouvent les chiffres exprimant l'influence de la déclinaison du Soleil, extraits du tome III des *Observations*.

On reconnaît immédiatement, en choisissant les cas les plus favorables, à savoir les périodes de plus grande déclinaison solaire australe et, dans ces périodes, les parties qui correspondent à midi, que l'influence de la Lune ne doit nullement être rangée parmi les phénomènes de peu de signification et de faible intensité, comme on l'avait conclu jusqu'ici des observations moyennes: au contraire, ainsi que le remarque M. Broun, l'amplitude (*range*) du mouvement peut égaler, ou même surpasser, celle du mouvement excité par le Soleil.

Le résultat le plus remarquable qui ressort du tableau, c'est que la période double paraît dépendre positivement de la proximité du Soleil, car, aussi bien lorsque la distance zénithale est de 180° que lorsque la déclinaison du Soleil est boréale (en moyenne à peu près 14° 30′), cette période double disparaît et une période simple se manifeste. Si le Soleil ne luisait pas à Batavia, il ne se produirait qu'un mouvement simple, et la même chose aurait lieu si le Soleil restait fixé dans sa position du mois de juillet.

On ne saurait d'ailleurs songer ici à un effet de la chaleur ou de la lumière: ce qui le prouve de nouveau, c'est que, pour la période du coucher du Soleil, alors que la Terre est encore échauffée, le mouvement est plus faible que pour la période du lever, où tombe la température minimum.

Pour Trévandrum, j'ai calculé les mouvements séparément pour la période d'été et pour la période d'hiver (Tableau XII), à l'aide des tableaux donnés dans les Trevandrum *Observations*. Il faut remarquer, à ce propos, que la période estivale correspond à une déclinaison solaire boréale de 14° 30′, la période hibernale, à une déclinaison australe de même valeur.

De cette façon, le double caractère du mouvement s'accuse nettement: en été, le mouvement est toujours comme à Kew, en hiver, toujours comme à Melbourne. Seule la période de Minuit fait de nouveau exception: le mouvement double n'y disparaît pas, comme à Batavia, mais il conserve son caractère austral, même lorsque le Soleil est au nord de l'équateur.

En admettant que la grandeur du mouvement soit représentée par les déviations moyennes données au bas des tableaux XI et XII, on trouve que la moyenne générale, déduite des quatre périodes du jour sur lesquelles notre examen a porté, est

pour Batavia . . 6″, 1.
„ Trévandrum 3″, 4.

Comparé à ces nombres, le mouvement moyen durant chacune des quatre périodes présente les rapports suivants:

	Batavia.	Trévandrum.
Lever du Soleil . . .	1,2	 1,2
Coucher „ „ . . .	0,6	 0,8
Midi	1,8	 1,6
Minuit	0.5	 0,4

L'influence de la position du Soleil paraît donc être la même pour ces deux stations.

Le traitement détaillé des observations de Trévandrum me permet, enfin, de donner dans le tableau XIII les déviations telles qu'elles se montreraient si les conditions les plus favorables persistaient indéfiniment.

Ce tableau est déduit, de la même manière que les deux précédents, des quatre courbes pour les périodes des phases lunaires durant le mois de janvier. Les rapports des déviations à la moyenne sont respectivement:

1,2 , 0,9 , 1,7 , 0,2 ,

nombres qui s'accordent de nouveau, aussi bien que possible, avec ceux trouvés plus haut.

De ce tableau ressort suffisamment le haut intérêt des recherches concernant l'influence de la Lune sur l'aiguille aimantée, en même temps qu'est indiquée la voie par laquelle pourront être obtenus, sans beaucoup de peine, des résultats pour d'autres stations. Si l'on calcule, en effet, l'influence lunaire au moyen d'observations faites au milieu du jour (quand même il n'y en aurait que très peu par jour), l'influence moyenne pourra être

trouvée à l'aide des nombres proportionnels donnés ci-dessus, et le résultat sera plus net, parce que, pour ces heures du jour, l'influence de la Lune est plus forte [1]).

Quant à savoir si ces nombres proportionnels resteraient applicables à tous les lieux, même à ceux qui sont très distants l'un de l'autre, c'est ce qu'il y aura encore lieu de rechercher pour un certain nombre de stations choisies. Le fait que dans l'hémisphère nord la variation est plus grande en été qu'en hiver, et que dans l'hémisphère sud c'est l'inverse, s'explique, dans une certaine mesure, par la circonstance qu'à un jour plus long doit correspondre une influence lunaire plus accentuée. Toutefois, des forces entièrement différentes entrent aussi en jeu dans ce phénomène, comme le prouve Batavia, où la durée du jour ne varie que d'environ 40 minutes et ne saurait par conséquent rendre compte de la grande différence qui existe entre la courbe de l'été et celle de l'hiver.

En tout cas, l'importance du mode de traitement est nettement mise en évidence par ce qui précède. Des heures d'observation différentes doivent conduire à des résultats tout différents, et la manière dont on élimine les perturbations a également une grande influence, sinon sur l'époque, au moins sur l'amplitude de la période.

Il serait donc très utile que les données réunies avec tant de soin par Sabine fussent encore une fois soumises à une discussion attentive: les grandes déviations, dans des circonstances favorables, montrent que ce travail aurait pour la théorie du magnétisme terrestre un intérêt extrême; surtout les observations de St.-Hélène fourniraient peut-être beaucoup de résultats inattendus. Ce travail devrait embrasser les points suivants:

1°. la marche durant chaque mois de l'année;

2°. la marche durant les périodes des quatre phases de la Lune;

3°. la marche avec et sans perturbations.

---

[1]) De cette manière est mise en évidence la cause de la grande valeur que j'ai déduite, pour l'influence lunaire au Helder, d'observations faites trois fois par jour (*Arch. néerl.*, t. XIII).

Bien que désirable, l'examen concernant l'influence de la déclinaison lunaire sur l'aiguille aimantée paraît moins nécessaire. Ni à Melbourne, ni à Trévandrum, un pareil examen n'a fait découvrir des différences déterminées dans les courbes. Il résulte d'ailleurs de la formule (3), que la double période dépend du carré du cosinus de la déclinaison lunaire, et que par conséquent elle est indépendante du signe de cette déclinaison et peu dépendante de sa grandeur.

Mais, ce qui est vivement à souhaiter, c'est que pour les nombreuses localités où l'on a observé quelques fois par jour, on prenne la peine, relativement légère, de ranger les résultats suivant les heures lunaires.

TABLEAU I.

Coordonnées géographiques des stations et indication des éléments magnétiques.

STATIONS.	Latitude.	Longitude.	Déclinaison.	Intens. horizontale.	Intens. verticale.	Années.
Dublin............	53° 23′ N.	6° 20′ O.	27° 20′ O.	3.5	9.9	1841 – 1843
Greenwich..........	51 28 N.	—	21 39 O.	3.8	9.5	1858—1863
Kew..............	51 28 N.	0 2 O.	21 39 O.	3.8	9.5	1858—1864
Toronto...........	43 40 N.	79 22 O.	1 20 O.	3.5	13.3	1843—1848
Philadelphie........	39 58 N.	75 10 O.	3 32 O.	4.2	12.8	1840—1845
Pékin..............	39 54 N.	106 26 E.	1 48 O.	6.0	8.9	1852—1855
Trévandrum........	8 37 N.	77 19 E.	0 32 E.	8.1	0.5	1854—1864
Batavia............	6 11 S.	106 50 E.	1 48 E.	8.0	4.2	1867—1875
St. Hélène.........	15 56 S.	5 41 O.	23 0 O.	5.6	2.3	1843—1847
Le Cap.....	33 56 S.	18 29 E.	29 0 O.	4.5	6.0	1842—1846
Melbourne..........	37 50 S.	145 0 E.	8 28 E.	5.1	12.1	1858—1863
Hobarton..........	42 53 S.	147 28 E.	9 55 E.	4.5	12.8	1841—1848

TABLEAU II.

Influence de l'angle horaire de la Lune sur l'aiguille de déclinaison: moyennes de l'année entière.

	HÉMISPHÈRE NORD.						HÉMISPHÈRE SUD.					
Heures lunaires.	Dublin.	Greenwich.	Kew.	Toronto.	Philadelphie.	Pékin.	Trévandrum.	Batavia.	St. Hélène.	Le Cap.	Melbourne.	Hobarton.
0	+16″.5	+15″.0	+ 7″.8	+16″.4	+11″.4	+ 4″.2	− 2″.5	− 8″.2	− 2″.6	− 8″.9	− 6″.4	−10.
1	+13.4	+13.8	+11.1	+13.9	+10.2	+ 3.3	− 1.7	− 6.9	− 0.3	− 6 4	− 7.8	−10.
2	+10.3	+16.2	+10.7	+ 9.5	+ 3.0	+ 1.5	− 0.4	− 5.2	+ 2.2	− 2.1	− 5.1	−10.
3	+ 4.1	+12 0	+ 3.5	+ 5.2	+ 2.4	− 0.7	+ 1.1	− 1.3	+ 4.2	+ 2.6	+ 0.9	−8.
4	− 2.1	+ 7.2	+ 4.2	− 8.2	− 6.0	− 2.6	+ 2.5	+ 3.0	+ 5.1	+ 6.5	+ 5.9	−5.
5	−13.4	− 1.2	− 1.3	−15.2	− 8.4	− 3.7	+ 3.2	+ 3.2	+ 4.6	+ 8.4	+ 9.2	+3.
6	−24.8	− 7.2	− 7.2	−19.5	−11.4	− 3.9	+ 3.3	+ 9.5	+ 2.9	+ 7.9	+11.7	+9.
7	−19.6	−15.0	−11.6	−17.3	− 8.4	− 3.0	+ 2.7	+ 9.1	+ 0.3	+ 4.9	+12.1	+10.
8	−14.4	−13.8	− 9.7	− 8.7	− 9.0	− 1.3	+ 1.5	+ 6.0	− 2.6	+ 0.3	+ 9.0	+9.
9	− 4.1	− 4.2	− 4.8	− 1.3	+ 0.6	+ 0.6	0.0	+ 2.6	− 4.9	− 4.7	+ 2.1	+4.
10	+ 6.2	+ 1.8	− 1.8	+12.6	+ 6.0	+ 2.2	− 1.4	− 1.7	− 6.1	− 8.6	− 6.2	+1
11	+17.6	+ 4.8	+ 3.0	+19.9	+11.4	+ 3.1	− 2.3	− 3.4	− 5.9	−10.6	−10.3	−[illegible]
12	+28.9	+16.2	+ 7.5	+20.4	+17.4	+ 2.9	− 2.5	− 5.2	− 4.4	− 9.9	−11.4	−[illegible]
13	+29.9	+13 2	+ 9.4	+15.6	+11.4	+ 1.7	− 2.1	− 5.2	− 1.9	− 6.7	−10.4	−[illegible]
14	+30.9	+ 7.8	+ 8.1	+ 8.2	+ 7.8	− 0.2	− 1.2	− 3.9	+ 0.8	+ 1.8	− 7.0	−[illegible]
15	+17.5	+ 4.8	+ 3.4	− 1.7	+ 3.6	− 2.3	0.0	− 1.3	+ 3.1	+ 3.5	− 2.4	−7
16	+ 4.1	− 3.0	− 1.6	−10.4	− 6.0	− 4.0	+ 1.1	+ 1.7	+ 4.4	+ 7.9	+ 4.3	−5
17	− 7.3	−10.2	− 5.4	−18.2	−10.8	− 5.0	+ 1.7	+ 4.3	+ 4.4	+10.3	+ 7.4	+2
18	−18.6	−16.8	− 8.0	−23.4	−15.6	− 4.8	+ 1.7	+ 4.7	+ 8.1	+10.1	+ 6.7	+9.
19	−22.7	−19.2	−10.8	−15.6	−11.4	− 3.5	+ 1.2	+ 3.4	+ 1.0	+ 7.3	+ 7.8	+14.
20	−26.8	−19.8	− 9.6	− 9.1	− 7.2	− 1.5	+ 0.1	+ 0 9	− 1.5	+ 2.7	+ 8.0	+13
21	−16.5	−13.8	− 6.8	+ 2.6	+ 0.6	+ 0.8	− 1.1	− 2.6	− 3.5	− 2.4	+ 5.2	+10
22	− 6.2	− 3.0	− 1.9	+10.4	+ 2.4	+ 2.9	− 2.2	− 5 6	− 4.4	− 6.7	− 3.1	+[illegible]
23	+ 5.2	+ 7.2	+ 2.4	+13.9	+ 7.2	+ 4.1	− 2.7	− 6.9	− 4.1	− 9.2	− 6.3	−[illegible]

TABLEAU III.

Influence de l'angle horaire de la Lune sur l'aiguille de déclinaison, exprimée en unités de force anglaises.

	HÉMISPHÈRE NORD.						HÉMISPHÈRE SUD.					
Heures lunaires.	Dublin.	Greenwich.	Kew.	Toronto.	Philadelphie.	Pékin.	Trévandrum.	Batavia.	St. Hélène.	Le Cap.	Melbourne.	Hobarton.
0	+ 289	+ 285	+ 148	+ 287	+ 239	+ 126	— 101	— 328	— 73	— 200	— 168	— 230
1	+ 235	+ 262	+ 211	+ 243	+ 214	+ 99	— 69	— 276	— 8	— 144	— 199	— 243
2	+ 180	+ 308	+ 203	+ 166	+ 63	+ 45	— 16	— 208	+ 62	— 47	— 130	— 243
3	+ 72	+ 228	+ 67	+ 91	+ 50	— 21	+ 45	— 52	+ 118	+ 59	+ 23	— 189
4	— 37	+ 137	+ 80	— 144	— 126	— 78	+ 101	+ 120	+ 143	+ 146	+ 150	— 122
5	— 235	+ 23	— 25	— 266	— 176	— 111	+ 130	+ 328	+ 129	+ 189	+ 235	+ 68
6	— 184	+ 137	+ 137	— 341	— 239	— 117	+ 184	+ 380	+ 81	+ 178	+ 298	+ 203
7	— 343	— 285	— 220	— 303	— 176	— 90	+ 109	+ 364	+ 8	+ 110	+ 309	+ 230
8	— 252	— 262	— 184	— 152	— 189	— 39	+ 61	+ 240	— 73	+ 7	+ 230	+ 203
9	— 72	— 80	— 91	— 23	+ 13	+ 18	0	+ 104	— 137	— 106	+ 54	+ 108
10	+ 109	+ 34	— 34	+ 221	+ 126	+ 66	— 57	— 68	— 171	— 194	— 158	+ 41
11	+ 308	+ 91	+ 57	+ 348	+ 239	+ 93	— 93	— 136	— 165	— 239	— 263	— 95
12	+ 506	+ 308	+ 143	+ 357	+ 365	+ 87	— 101	— 208	— 123	— 223	— 291	— 162
13	+ 523	+ 251	+ 179	+ 273	+ 289	+ 51	— 85	— 208	— 58	— 151	— 265	— 324
14	+ 541	+ 148	+ 154	+ 144	+ 164	— 6	— 49	— 156	+ 22	— 41	— 179	— 284
15	+ 306	+ 91	+ 65	— 30	+ 76	— 69	0	— 52	+ 87	+ 79	— 61	— 176
16	+ 72	— 57	— 80	— 182	— 126	— 120	+ 45	+ 68	+ 128	+ 178	+ 110	— 122
17	— 128	— 194	— 103	— 319	— 227	— 150	+ 69	+ 172	+ 123	+ 232	+ 189	+ 54
18	— 326	— 319	— 152	— 410	— 328	— 144	+ 69	+ 188	+ 87	+ 227	+ 171	+ 216
19	— 397	— 365	— 205	— 273	— 239	— 105	+ 49	+ 136	+ 28	+ 164	+ 199	+ 324
20	— 469	— 376	— 182	— 159	— 151	— 45	+ 4	+ 36	— 42	+ 61	+ 204	+ 311
21	— 289	— 262	— 129	+ 46	+ 18	+ 24	— 45	— 104	— 98	— 54	+ 138	+ 243
22	— 109	— 57	— 86	+ 182	+ 50	+ 87	— 89	— 224	— 123	— 151	— 79	+ 54
23	+ 91	+ 187	+ 46	+ 245	+ 151	+ 123	— 109	— 276	— 115	— 207	— 161	— 68

TABLEAU IV.

Influence de l'angle horaire de la Lune sur le magnétomètre bifilaire, exprimée en unités de force anglaises.

Heures lunaires.	Dublin.	Greenwich.	Kew.	Toronto.	Philadelphie.	St. Hélène.	Le Cap.	Melbourne.	Hobarton.
0	+ 35	+ 163	+ 87	+ 52	+ 47	+ 21	+ 48	— 76	— 72
1	+ 158	+ 144	+ 183	+ 104	+ 77	— 80	+ 120	— 85	— 10
2	+ 280	+ 182	+ 194	+ 113	+ 139	— 75	+ 152	+ 27	+ 47
3	+ 193	+ 182	+ 137	+ 119	+ 169	— 91	+ 116	+ 42	+ 76
4	+ 105	+ 114	+ 99	+ 67	+ 82	— 125	+ 48	+ 5	+ 127
5	+ 18	— 8	+ 57	+ 119	+ 108	— 91	+ 17	— 15	+ 27
6	— 70	— 209	— 68	+ 67	+ 1	— 52	— 38	+ 19	+ 70
7	— 228	— 217	— 166	+ 6	+ 16	— 85	— 51	+ 5	+ 27
8	— 385	— 236	— 121	— 33	— 91	— 13	— 132	+ 7	— 72
9	— 333	— 122	— 190	— 52	— 60	+ 110	— 87	— 22	— 53
10	— 280	— 122	— 129	— 58	— 80	+ 166	— 47	— 61	— 28
11	— 193	+ 46	— 53	+ 37	+ 16	+ 161	— 33	+ 48	— 44
12	— 105	+ 141	+ 46	— 21	+ 108	+ 93	+ 48	— 77	— 10
13	— 35	+ 198	+ 122	+ 79	+ 32	+ 82	+ 53	+ 128	+ 9
14	— 35	+ 228	+ 122	+ 70	+ 62	+ 60	+ 120	+ 81	+ 61
15	+ 140	+ 182	+ 95	+ 46	— 45	— 63	+ 111	+ 119	+ 65
16	+ 245	+ 87	+ 84	+ 27	+ 16	— 75	+ 26	+ 117	+ 87
17	+ 193	+ 80	— 7	— 6	— 106	— 58	— 42	+ 36	+ 56
18	+ 140	— 95	— 83	— 82	— 198	— 63	— 51	+ 21	+ 9
19	+ 53	— 144	— 133	— 137	— 91	— 35	— 101	+ 44	+ 26
20	— 35	— 179	— 133	— 192	— 75	+ 4	— 173	— 70	— 21
21	0	— 323	— 102	— 167	— 152	+ 21	— 110	— 131	— 92
22	+ 35	— 141	— 102	— 107	— 14	+ 60	— 47	— 122	— 139
23	+ 35	+ 87	+ 27	— 49	+ 32	+ 37	+ 48	— 44	— 144

TABLEAU V.

Influence de l'angle horaire de la Lune sur le magnétomètre-balance, exprimée en unités de force anglaises.

Heures lunaires.	Dublin.	Greenwich.	Kew.	Toronto.	Philadelphie.	St. Hélène.	Le Cap.	Hobarton.
0	— 40	— 16	+ 34	— 22	— 57	— 25	+ 60	+ 59
1	— 36	— 65	— 52	— 30	— 160	+ 49	0	— 9
2	— 59	— 240	— 100	+ 84	— 389	+ 58	— 84	— 86
3	+ 78	— 96	— 109	+ 5	— 83	+ 88	— 102	— 122
4	+ 48	— 160	— 106	— 22	+ 147	+ 152	— 102	— 99
5	+ 203	— 122	— 43	+ 4	— 109	+ 81	— 90	— 23
6	+ 283	+ 322	+ 5	+ 31	+ 160	+ 102	— 102	— 23
7	+ 44	+ 421	+ 24	+ 66	+ 173	+ 51	— 96	— 32
8	+ 298	+ 459	+ 53	+ 84	— 83	— 41	+ 72	+ 59
9	+ 291	+ 296	+ 91	+ 49	— 45	— 38	+ 144	— 5
10	+ 127	+ 123	+ 43	+ 57	— 287	— 52	+ 102	— 9
11	+ 196	+ 197	— 14	+ 40	+ 211	— 98	+ 126	+ 18
12	+ 89	— 73	— 14	+ 40	+ 185	— 20	+ 84	— 9
13	— 36	— 141	— 24	— 39	+ 83	— 1	0	— 72
14	— 226	— 358	— 81	— 22	+ 199	+ 31	— 24	— 59
15	— 298	— 259	— 119	— 65	+ 109	+ 97	— 6	— 36
16	— 184	— 27	— 71	— 111	+ 147	+ 104	— 24	— 86
17	— 230	+ 71	— 71	— 83	+ 32	+ 54	— 60	— 9
18	— 116	+ 246	+ 5	— 83	+ 7	+ 17	— 66	+ 32
19	+ 32	— 73	+ 72	— 57	+ 58	— 38	— 24	+ 95
20	+ 70	+ 147	+ 81	— 22	— 45	— 185	+ 18	+ 81
21	+ 25	+ 102	+ 186	+ 31	— 109	— 128	+ 12	+ 122
22	— 177	— 366	+ 119	+ 22	+ 7	— 137	+ 78	+ 108
23	— 393	— 385	+ 91	+ 57	— 198	— 147	+ 84	+ 99

TABLEAU VI.

Influence de l'angle horaire de la Lune sur les déviations perturbatrices à Batavia, de juillet 1867 à janvier 1870.

Angle horaire de la Lune.	Déviation.	Angle horaire de la Lune.	Déviation.	Angle horaire de la Lune.	Déviation.	Angle horaire de la Lune	Déviation.
0	—63″.0	6	+80″.7	12	—22″.6	18	+ 7″.1
1	—49.3	7	+70.9	13	—45.3	19	+22.5
2	—50.3	8	+50.3	14	—34.3	20	+15.2
3	—21.7	9	+11.6	15	—12.1	21	+ 5.9
4	+36.3	10	— 6.6	16	+ 8.3	22	—18.7
5	+48.4	11	—14.3	17	+ 8.2	23	—39.2

TABLEAU VII.

Azimut et grandeur de la force déviatrice.

Heures lunaires.	Dublin.	Greenwich.	Kew.	Toronto.	Philadelphie.	St. Hélène.	Le Cap.	Melbourne.	Hobarton.
0	291.277°	328.300°	172.200°	292.280°	244.281°	76. 74°	206. 77°	180.115°	241.107
1	283.304	299.299	279.311	264.293	227.290	**31**.165	187. 50	216.113	243. 92
2	333.327	358.301	281.314	201.304	153.336	**97**.220	159. 17	13[illegible]	248. 79
3	206.340	292.309	152.334	**150**.323	176.289	110.233	**130** 333	**48**.[illegible]	204. 68
4	**111**. 19	178.310	127.321	159. 65	**130**. 76	190.229	154.288	150.[illegible]	176. 44
5	236. 86	**24**.109	**62**. 24	291. 66	206. 58	158.235	190.275	236.266	**73**.292
6	440. 99	250.147	153.116	348. 79	239. 90	96.237	182.258	299.274	215.289
7	412.128	358.127	259.122	303. 89	177. 65	**36**.193	121.245	309.271	232.277
8	460.147	358.132	220.123	155.102	210.116	74.100	**132**.183	230.272	215.250
9	341.168	146.147	211.154	**57**.156	**61**.192	176. 51	187.129	**58**.248	120.244
10	**300**.201	127.196	133.165	228.255	130.257	238. 46	200.104	169.111	**50**.236
11	363.238	**102**.297	**78**.237	350.276	240.274	239.46	241. 98	267. 80	105 115
12	517.258	339.295	150.288	358.267	381.286	134. 53	228. 78	301.159	162. 94
13	524.266	320.308	217.304	284.286	241.278	98. 33	160. 71	294. 64	324. 88
14	542.274	272.327	196.308	160.296	175.291	**64**.340	**127**. 19	196. 66	290. 78
15	337.295	203.333	115.326	**55**. 33	**88**.239	107.234	**136**.325	**134**. 27	188. 70
16	255.344	**104**. 33	**89**. 20	184. 82	127. 83	144.239	180.278	161.317	150. 54
17	**232**. 34	196. 81	103. 94	319. 91	251.115	136 245	236.260	192.281	**78**.316
18	355. 67	333.107	173.119	418.101	383.121	107.234	233.257	172.277	216.278
19	401. 82	392.112	244.123	305.117	256.111	45.219	193.238	204.282	325.278
20	470. 94	416.115	225 126	249.140	169.116	**42**. 85	183.200	216.251	312.260
21	289. 90	416.141	164.128	**173**.195	158.185	100. 78	**123**.154	187.225	260.249
22	114. 72	**152**.158	108.161	211.240	**52**.254	137. 64	150.107	145.147	149.201
23	97.291	162.302	**53**.300	250.259	154.282	121. 72	212. 77	167.105	159.205

TABLEAU VIII.

Heures lunaires.	Dublin.		Greenwich.		Kew.		Toronto.		Philadelphie.		St. Hélène.		Le Cap.		Melbourne.		Hobarton.	
0.12	404	265°	334	297°	161	294°	325	273°	313	284°	115	60	217	77°	241	143°	202	102°
1.13	404	279	310	304	248	308	274	289	234	284	**65**	65	174	60	255	85	284	90
2.14	438	294	315	312	239	312	181	300	164	312	81	268	143	18	165	71	269	78
3.15	272	312	248	319	134	331	**103**	342	132	272	109	233	**133**	329	**91**	12	196	69
4.16	**183**	355	141	341	108	345	172	74	**129**	79	167	233	167	283	156	295	163	49
5.17	284	60	**110**	84	**83**	68	305	79	229	89	147	240	213	267	214	273	**76**	304
6.18	398	85	292	122	163	118	383	91	311	109	102	235	208	257	236	275	216	280
7.19	407	103	375	119	252	122	304	103	217	100	**41**	207	157	241	257	275	279	276
8.20	465	118	385	123	223	125	202	125	190	116	58	95	158	193	223	262	264	259
9.21	315	132	281	143	188	143	**115**	185	107	187	138	61	**130**	141	**123**	230	190	247
10.22	**207**	166	140	173	121	163	220	248	**91**	256	188	53	175	105	157	128	**100**	210
11.23	230	250	**132**	300	**66**	256	300	269	197	277	176	55	227	86	217	90	132	169

TABLEAU IX.

Éléments de l'ellipse de la force.

	a	b	f	e	α	β
Dublin	419	121	376	0.928	103°—42′	76°—22′
Soleil au N. de l'éq.	454	182	416	0.917	86 — 9	58 —49
Soleil au S. de l'éq.	351	94	338	0.963	105 — 6	77 —46
Kew	238	56	231	0.972	129 —15	107 —36
Greenwich	366	66	360	0.984	126 —16	104 —37
Toronto	337	98	322	0.957	94 —14	92 —54
Philadelphie	268	64	261	0.971	104 —40	101 — 8
Soleil au N. de l'éq.	356	96	343	0.962	99 —26	95 —54
Soleil au S. de l'éq.	245	34	243	0.993	112 —47	109 —15
St. Hélène	174	11	173	0.998	66 —30	48 —30
Le Cap	222	115	191	0.857	83 —50	58 —50
Melbourne	264	59	257	0.974	93 —11	101 —39
Soleil au N. de l'éq.	70	49	50	0.721	116 — 0	124 —28
Soleil au S. de l'éq.	432	83	424	0.981	80 —15	88 —48
Hobarton	278	85	265	0.953	85 —33	95 —98

TABLEAU X.

Formules de période double pour la déclinaison et la force horizontale, en millionièmes de l'unité anglaise.

	DÉCLINAISON.			FORCE HORIZONTALE.		
	Eté.	Hiver.	Année.	Eté.	Hiver.	Année.
Dublin	453, 56°	338, 66°	397, 60°	184, 318°	128, 17°	180, 357°
Kew	249, 67	150, 27	188, 52	—	—	157, 25
Greenwich	—	—	298, 55	—	—	223, 34
Toronto	—	—	336, 91	—	—	101, 14
Philadelphie	351, 67	218, 115	260, 85	111, 6	92, 92	92, 39
Pékin	—	—	123, 105	—	—	—
Trévandrum	85, 92	296, 280	105, 283	—	—	—
Batavia	—	—	276, 265	—	—	—
St. Hélène	—	—	143, 320	—	—	95, 132
Le Cap	—	—	221, 290	—	—	117, 30
Melbourne	66, 249	434, 262	263, 261	53, 265	111, 33	61, 339
Hobarton	108, 203	457, 231	278, 226	—	—	87, 329

TABLEAU XI.

Déviations de l'aiguille de déclinaison aux heures lunaires, pour des périodes de distance zénithale du Soleil et de déclinaison du Soleil, à Batavia.

Heures lunaires.	Lever du soleil.	Coucher du soleil.	Midi.	Minuit.	Jour.	Nuit.	Déclinaison du soleil. Sud.	Nord.
0	— 6″.0	— 6″.9	— 16″.8	— 5″.2	— 11″.4	— 6″.1	— 13″.8	— 4″.3
1	— 9.9	— 4.7	— 10.8	— 4.7	— 10.4	— 4.7	— 12.5	— 3.4
2	— 8.2	— 4.3	— 5.6	— 3.9	— 6.9	— 4.1	— 8.6	— 2.6
3							— 2.2	— 2.6
4	+ 0.4	+ 1.3	+ 6.5	— 0.4	+ 3.9	0.0	+ 6.0	— 1.3
5	+ 4.7	+ 3.4	+ 19.0	+ 3.4	+ 11.2	+ 4.1	+ 14.7	+ 1.3
6	+ 8.6	+ 2.6	+ 22.4	+ 3.4	+ 12.5	+ 3.1	+ 17.2	+ 1.7
7	+ 13.4	+ 1.3	+ 18.5	+ 4.7	+ 16.0	+ 3.0	+ 14.7	+ 3.9
8	+ 11.6	+ 1.7	+ 9.5	+ 3.0	+ 10.6	+ 2.4	+ 9.1	+ 4.7
9							+ 3.4	+ 3.4
10	+ 4.3	— 3.4	— 6.5	+ 2.6	— 5.0	+ 3.5	— 4.7	+ 2.6
11	+ 3.9	— 3.0	— 12.5	+ 2.6	— 7.8	+ 3.3	— 8.6	+ 3.9
12	— 1.7	— 0.9	— 14.2	+ 2.6	— 8.0	+ 0.9	— 12.5	+ 3.0
13	— 9.1	— 0.4	— 7.8	+ 2.2	— 8.5	+ 1.0	— 11.6	+ 1.7
14	— 9.9	— 0.9	— 0.9	+ 0.4	— 5.4	— 0.3	— 8.2	+ 1.7
15							— 3.0	+ 1.7
16	+ 0.4	+ 7.3	+ 2.6	— 1.3	+ 5.0	— 0.5	+ 3.0	+ 0.9
17	+ 3.4	+ 5.6	+ 12.5	— 1.3	+ 9.1	+ 1.1	+ 8.6	+ 1.3
18	+ 10.3	+ 1.3	+ 13.4	— 3.0	+ 11.9	— 0.9	+ 9.9	+ 0.4
19	+ 11.6	— 1.7	+ 10.8	— 4.3	+ 11.2	— 3.0	+ 9.5	— 2.2
20	+ 9.5	— 0.9	+ 4.7	— 4.7	+ 7.1	— 2.8	+ 5.2	— 3.0
21							— 0.9	— 3.4
22	— 8.2	— 9.9	— 6.9	— 1.7	— 8.4	— 5.0	— 7.3	— 3.9
23	— 10.3	— 8.6	— 12.9	— 3.4	— 10.8	— 6.9	— 11.2	— 3.4
Moyenne	7.3	3.5	10.7	2.9	9.1	2.8	9.0	2.6

TABLEAU XII.

Déviations de l'aiguille de déclinaison aux heures lunaires, pour des périodes de distance zénithale du Soleil et de déclinaison du Soleil, à Trévandrum.

Heures lunaires.	Lever du soleil.		Coucher du soleil.		Midi.		Minuit.	
	Eté.	Hiver.	Eté.	Hiver.	Eté.	Hiver.	Eté.	Hiver.
0	+ 1″.8	— 0″.9	+ 0″.6	— 7″.3	+ 8″.7	—16″.4	— 1″.7	— 2″.6
1	+ 2.8	+ 0.1	— 0.3	— 3.0	+ 9.7	—10.5	— 2.5	— 2.0
2	+ 1.4	+ 1.5	— 0.9	+ 0.2	+ 5.0	— 1.9	— 3.2	— 1.5
3								
4	— 3.1	+ 3.2	— 1.8	+10.2	+ 0.7	+ 2.7	— 0.2	+ 1.9
5	— 3.1	+ 6.4	— 4.0	+11.6	— 0.7	+ 1.4	+ 0.4	+ 3.5
6	— 5.1	+ 9.1	— 3.0	+ 9.4	— 3.0	— 0.3	+ 0.5	+ 4.2
7	— 6.1	+ 9.7	— 1.8	+ 6.6	— 2.7	— 1.2	+ 1.2	+ 4.1
8	— 4.8	+ 8.2	— 0.5	+ 4.2	— 2.6	— 1.8	+ 1.8	+ 4.1
9								
10	+ 1.4	+ 2.5	+ 0.4	— 1.6	+ 1.6	— 2.5	— 0.1	+ 1.1
11	+ 3.0	— 1.7	+ 1.9	— 0.3	+ 3.9	— 8.5	— 1.2	— 0.5
12	+ 5.2	— 6.0	+ 2.0	+ 0.6	+ 4.3	—11.2	— 0.6	— 2.2
13	+ 4.7	—10.7	+ 1.3	+ 1.0	+ 5.4	— 9.4	— 1.0	— 3.8
14	+ 4.1	—10.1	— 0.9	+ 1.2	+ 5.8	— 6.9	— 1.5	— 4.0
15								
16	— 0.8	— 1.2	+ 1.4	+ 2.7	— 1.4	+ 2.7	+ 1.1	+ 0.2
17	— 2.3	+ 2.9	— 1.0	+ 3.4	— 3.6	+ 9.5	— 0.8	0.0
18	— 3.1	+ 8.2	— 1.1	+ 2.8	— 4.8	+11.7	+ 0.9	0.0
19	— 3.9	+ 8.9	+ 3.2	+ 1.6	— 5.1	+11.3	+ 0.9	+ 0.3
20	— 4.2	+ 5.8	+ 3.0	+ 0.1	— 4.9	+ 6.6	+ 0.4	— 0.5
21								
22	— 2.2	— 0.9	0.0	— 6.0	— 1.1	— 5.9	+ 1.9	— 1.1
23	— 0.8	— 1.2	+ 0.8	— 8.1	+ 2.5	—11.7	— 0.7	— 1.1
Moyenne	3.2	5.0	1.5	4.1	3.9	6.7	1.1	1.9

TABLEAU XIII.

Déviations de l'aiguille de déclinaison aux heures lunaires, pour des périodes de distance zénithale du Soleil, au mois de Janvier, à Trévandrum.

Heures lunaires.	Lever du soleil.	Coucher du soleil.	Midi.	Minuit.
0	— 13″.3	— 5″.0	— 31″.9	— 1″.5
1	— 14.2	— 2.5	— 22.0	— 3.3
2	— 5.0	+ 20.4	— 5.0	— 0.4
3				
4	+ 5 3	+ 16.4	+ 21.7	+ 3.1
5	+ 11.0	+ 18.8	+ 21.1	+ 4.0
6	+ 13.4	+ 14.9	+ 23.6	+ 3.8
7	+ 12.1	+ 9.2	+ 19.9	+ 2.5
8	+ 7.8	+ 5.3	+ 6.8	+ 0.9
9				
10	— 8.1	— 21.3	— 5.9	— 0.7
11	— 18.9	— 19.4	— 18.6	— 1.0
12	— 24.9	— 11.6	— 26.2	— 1.3
13	— 22.9	— 5.0	— 16.9	— 4.1
14.	— 8.3	— 2.8	— 9.9	- 2.2
15				
16	+ 3.1	+ 8.7	+ 26.4	+ 1.4
17	+ 12.6	+ 7 9	+ 33.0	+ 5.1
18	+ 21.8	+ 7.4	+ 26.5	+ 5.8
19	+ 23.9	+ 6.1	+ 10.6	+ 5.0
20	+ 7.4	+ 0.3	— 1.2	+ 2.4
21				
22	— 4.3	— 12.7	— 13.2	+ 2.3
23	— 14.1	— 10.3	— 26.9	— 0.6
Moyenne	12.6	10.3	18.4	2.6

SUR LA

CRISTALLISATION DU DIAMANT,

PAR

H. BEHRENS.

Lorsqu'on examine à un faible grossissement (20—50) les faces de diamants non taillés, on trouve sur la plupart d'entre elles de petites cavités en forme de pyramides triangulaires. Les faces naturelles en sont mieux pourvues que les faces de clivage; sur les faces de cassure proprement dites, on ne les rencontre que par exception. La grandeur de ces cavités varie assez fortement, de 3 millim. à 3 microm.; il en est de même de leur nombre. Certains diamants en sont littéralement couverts: tels sont ceux dont M. von Baumhauer a fait mention à la page 93 du présent volume des *Archives* et qu'il a figurés sur les planches III et IV; d'autres diamants ne présentent que très peu de ces petits triangles. Sur 427 faces naturelles que j'ai examinées, il n'y en avait que 13 qui fussent entièrement exemptes de pareilles fossettes; par contre, parmi 93 faces de clivage, je n'en comptai que 5 qui en étaient pourvues.

M. A. Sadebeck (*Ueber die Krystallisation des Diamanten, nach nachgelassenen Aufzeichnungen von* G. Rose, dans: *Abhandl. der Berlin. Akad. d. Wiss.*, 1876) dit que la forme des cavités répond à un icositétraèdre (leucitoèdre). Les constantes de cette forme ont été déterminées par G. Rose sur des figures d'érosion, obtenues au moyen d'une combustion superficielle du diamant.

Eu égard à la différence de position dont je parlerai plus loin, il ne me semble pas permis de conclure de la forme des cavités d'érosion à celle des cavités naturelles; d'ailleurs, outre les cavités hexagonales, qui doivent répondre au leucitoèdre,

on en trouve aussi un grand nombre de triangulaires, qui ne peuvent être rapportées au leucitoèdre, mais bien à l'octaèdre. Parfois la cavité est une pyramide renversée à sommet pointu; le plus souvent le sommet est tronqué par une face triangulaire ou hexagone. Les faces latérales inclinées sont rarement lisses, mais ordinairement en forme de gradins, par alternance avec la face du fond. Ces conformations en gradins, qui peuvent se présenter sur une assez grande échelle, auront suggéré à M. Sadebeck (*loc. cit.*) et à M. Hirschwald (*Zeitschr. f. Krystallogr. u. Mineral.*, 1877, p. 212) l'idée que le diamant possède une structure stratoïde (*Schalenstructur*, *schalenförmiger Aufbau*). Le clivage du diamant suivant les faces de l'octaèdre s'accorde assez bien avec cette idée; mais si, de la formation de gradins par accumulation régulière de rangées de cristaux microscopiques, on veut conclure à la structure par couches successives, ne sera-t-on pas obligé d'étendre cette conclusion à la magnétite, à la pyrite et au quartz, qui ne montrent absolument aucun clivage, ou du moins n'en offrent que des traces?

Les diamants cubiques sont très rares: parmi plus de 200 petits cristaux, je n'en ai trouvé que 2 de cette forme. Les faces du cube sont mates et inégales, elles sont accompagnées de faces du dodécaèdre, qui sont pareillement inégales et même distinctement crénelées ou dentelées; les angles sont tronqués par des facettes brillantes appartenant à l'octaèdre. Un grossissement modéré suffit pour appendre que les dentelures des côtés sont produites par des couples de semblables facettes lisses d'octaèdre, dont les crêtes sont parallèles aux diagonales des faces du cube; on reconnaît aussi que les inégalités des faces du cube sont des carrés et des rectangles, dont les côtés ont la direction des diagonales susdites; ces particularités ont déjà été figurées et décrites en détail par MM. Sadebeck et Rose.

Comme curiosité remarquable, on m'a remis deux petits cristaux de diamant, à travers lesquels était passé un fil. Le plus petit était un octaèdre très déformé; le trou qui le traversait présentait des gradins et un contour irrégulier. L'autre pierre

avait distinctement une forme cubique; trois des faces du cube étaient pourvues de cavités pyramidales à faces en gradins, qui offraient des sections rectangulaires et se rencontraient au centre de l'échantillon. J'ai trouvé des conformations analogues, de taille microscopique, dans le sel marin obtenu par évaporation rapide, et d'autres, de dimensions assez grandes (jusqu'à 8 cm.), parmi des cristaux d'alun préparés en grand.

La position relative des petites cavités est la même pour les cristaux cubiques et pour les cristaux octaédriques. Si l'on se figure deux des bords d'une cavité prolongés, on trouvera que les cavités voisines sont situées soit sur ces prolongements, soit sur des lignes qui y sont parallèles. Souvent on voit ces droites fictives représentées par de fines côtes, qui entourent et pour ainsi dire encadrent des groupes de cavités, leur formant sur les faces du cube une bordure rectangulaire, et sur les faces de l'octaèdre une bordure en triangle ou hexagone régulier.

La position des cavités par rapport à la face du cristal offre cette particularité, que sur les faces du cube les côtés des petits rectangles sont parallèles aux diagonales des faces, et que sur les faces de l'octaèdre les angles des petits triangles sont tournés vers les côtés de ces faces. En ce qui concerne les figures produites par corrosion sur le diamant, G. Rose a montré qu'elles sont parallèles aux côtés des faces du cristal, et il en est de même des saillies naturelles (qui appartiennent le plus souvent à l'hexakisoctaèdre et qui se rencontrent assez rarement). Ce contraste porte immédiatement à conclure que les cavités peuvent répondre à la moitié inférieure de petits octaèdres, ou, en d'autres termes, que si l'une des saillies était extraite en entier, il en résulterait une cavité semblable de forme et de position à celles qui ont été décrites ci-dessus. Il n'est pas improbable que les cavités qu'on observe parfois sur des faces de clivage sont nées de cette manière.

M. Sadebeck, partant de l'idée de la structure par couches, arrive à une autre explication de l'origine des cavités. Il admet que, par suite d'une irrégularité dans l'accroissement (d'une juxtaposition et d'une superposition irrégulières des sous-individus

qui doivent former les „couches"), irrégularité dont le diamant présente de fréquents exemples, il se forme çà et là des saillies, qui circonscrivent des creux, et ces creux seraient les cavités en question. Moi-même j'ai essayé de concevoir les cavités en quelque sorte comme des espaces intercellulaires, qu'auraient laissés entre eux les sous-individus ou les groupes de sous-individus. Cette interprétation se concilie aisément avec la position et l'enchaînement régulier des cavités, mais je n'ai pas réussi à construire à son aide les cavités hexagonales. A cette dernière difficulté vient aussi se heurter, me semble-t-il, l'explication donnée par M. Sadebeck, laquelle d'ailleurs ne rend nullement compte de l'enchaînement régulier des cavités.

Je crois qu'il faut revenir à l'idée de sous-individus manquants. Si l'on suppose deux espèces de sous-individus, les uns octaédriques, les autres leucitoédriques, et qu'on admette en outre, ce qui d'ailleurs n'est pas difficile à démontrer, que le cristal s'accroît plus fortement suivant des directions déterminées, on a tous les éléments nécessaires pour expliquer les particularités de la surface des cristaux du diamant. L'examen — sur les faces et sur des coupes — de grands cristaux d'alun m'a appris que les côtés s'accroissent plus fortement et arrivent plus vite à l'état de masse compacte que les centres des faces. Microscopiquement j'ai observé quelque chose d'analogue chez le tartrate d'antimoine et de potassium (tartre émétique), qui cristallise en tétraèdres. Ce sel donne d'abord naissance à une petite étoile à trois rayons, lesquels rayons sont composés de triangles placés à la suite l'un de l'autre; ensuite, d'autres triangles plus petits, n'ayant que le ¼ de la dimension des premiers, viennent s'accoler à ceux-ci suivant le prolongement de leurs côtés, et cette seconde période de la cristallisation s'achève plus vite pour le contour que pour l'intérieur du squelette cristallin, qui peut même rester vide en partie. Evidemment on a affaire ici, comme chez le diamant, à un accolement parallèle des sous-individus, accolement s'opérant suivant deux modes différents, le long de la hauteur des faces et le long des arêtes. Il est difficile de

décider si sur les faces octaédriques du diamant ces deux variétés d'accolement se rencontrent l'une et l'autre; en tout cas la seconde, celle à arêtes continues, est certainement prédominante. Les cubes du diamant présentent encore une troisième variété, à savoir, l'accolement à axes continus. Quatre octaèdres se touchent chaque fois par une de leurs arêtes, et un cinquième octaèdre est intercalé entre eux; tous ont un de leurs angles tourné en haut, vers la face fictive du cube. Si l'on imagine que le cinquième octaèdre, l'octaèdre central, soit enlevé, il devra laisser à sa place une cavité en forme de pyramide carrée. En outre, des considérations très simples montrent comment, par suite d'une pareille structure, les faces du cube doivent devenir mates, et comment prennent naissance les faces crénelées du dodécaèdre, les faces brillantes de l'octaèdre et les encadrements rectangulaires des cavités carrées; tous ces détails s'expliquent sans qu'il soit nécessaire de recourir à l'hypothèse d'une formation par couches successives.

Remarquons encore qu'une structure analogue à celle qui a été décrite ci-dessus pour les faces du diamant se retrouve aussi, sur une assez grande échelle, chez la galène, et avec une netteté particulière chez la blende. Ces deux minéraux, toutefois, ne se prêtent pas aussi bien à l'observation microscopique que le diamant, qui présente l'avantage d'une transparence parfaite.

Bort et diamant dit amorphe (*carbon des lapidaires*). Entre ces deux variétés il existe d'étroits rapports, ainsi que M. von Baumhauer en a déjà fait l'observation il y a quelques années [1]).

Sous le nom de „bort" on désigne des diamants globulaires, dont la surface n'est jamais tout à fait lisse, mais couverte d'une espèce de réseau brillant. Le plus souvent ils sont gris clair et translucides; toutefois, il y a aussi des boules de bort qui sont opaques et qui montrent sur leur cassure la couleur de la variété brune du carbon. Personne, sans doute, ne sera tenté de regarder le bort translucide comme une masse amorphe;

1) *Arch. néerl.*, t. VIII, p. 96.

il n'est pas rare, en effet, de trouver des échantillons dont l'une des moitiés est du bort et l'autre du diamant bien cristallisé, sans qu'il soit possible de tracer une ligne de démarcation nette entre les deux substances; en outre, il suffit du grossissement d'une loupe ordinaire pour débrouiller le réseau qui orne la surface de ces boules de bort. On y reconnaît ainsi des enchaînements de petits cristaux octaédriques (voir la fig. 5 du Mémoire de M. von Baumhauer, dans le présent tome des *Archives*), qui font songer par leur forme à des lignes de fortification. Les petits cristaux individuels sont transparents et incolores; la teinte grise est due aux réflexions multiples de la lumière et à son absorption par quelques grains de couleur foncée qui sont disséminés dans la masse. On sait que les facettes obtenues en frottant deux diamants l'un contre l'autre présentent une couleur grise, et c'est même de là que dérive le terme „égriser" par lequel cette opération est désignée; la poudre de diamant est également de couleur grise. Cette explication de la couleur des boules de bort s'accorde d'ailleurs très bien avec le fait que cette substance ne cède rien ni à l'eau régale, ni à l'acide sulfurique chaud.

L'excessive dureté du bort, qui en rend le travail impossible et ne permet de l'employer qu'à la fabrication de la poudre de diamant, est facile à expliquer par l'irrégularité de sa structure: on sait, en effet, que les clivages du diamant jouent un rôle important non seulement dans l'opération de la taille, mais aussi dans celles de l'égrisage et du polissage (Von Baumhauer, *Tydschr. d. Maatsch. v. Nyverheid*, t. XIV, p. 22).

Je ne puis dire, de science personnelle, si entre les cristaux de diamant et le carbon il existe des passages analogues à ceux qu'on observe entre le bort et le diamant transparent et bien cristallisé; mais, du carbon au bort, il y a une transition bien réelle. J'ai eu en main un morceau de carbon brun noirâtre, sur lequel était fixée une sphère de bort de 5 mm. de diamètre. La surface de cette sphère était noire et brillante; elle n'avait rien de l'aspect du carbon, auquel elle passait insensiblement

par diminution de l'éclat et éclaircissement de la couleur. A l'un des côtés, toutefois, la sphère était séparée du carbon sous-jacent par une fissure; en ce point je réussis à détacher par le choc un petit éclat de la sphère, ce qui permit de constater que la cassure ressemblait tout à fait à celle du carbon. La structure de la surface, représentée dans la fig. 6, Pl. III, était de tout autre nature que chez les boules grises. Si pour celles-ci, nous avons pu citer comme terme de comparaison les agrégats quartzeux de l'agate fortifiée, les productions cristallines allongées, arquées, fréquemment ramifiées de la surface de la boule noire doivent être comparées à des fleurs de givre, ou plutôt, vu que la ramification se fait ordinairement à angles droits, à des dendrites de sel ammoniac. La plupart de ces dendrites convergent vers le sommet de la sphère. Sur quelques-unes, à un grossissement de 150 fois, on observe à l'extrémité des rameaux, qui sont composés de petits cristaux excessivement ténus, des octaèdres plus grands et bien conformés, particularité qui se rencontre fréquemment aussi dans les dendrites cruciformes de la magnétite, dans une foule de basaltes et dans les scories riches en fer.

M. von Baumhauer a distingué dans le carbon, ou „diamant amorphe", deux variétés, dont il a mis avec beaucoup d'obligeance des échantillons à ma disposition. L'une de ces variétés, dont il vient d'être question à propos des boules de bort noir, possède une couleur brun noirâtre ou brun grisâtre et une cassure presque terne; l'autre, de couleur violet clair ou rose, est beaucoup plus rude au toucher et brille fortement. Les échantillons de la variété brune, que j'ai eus en main, étaient assez compacts et ressemblaient à du grès schistoïde à grains fins, tandis que la cassure de la variété rouge est beaucoup plus poreuse et offre l'aspect de la lave.

Si l'on examine le carbon à un grossissement de 30 fois, on observe aussi sur la cassure de la variété brune des cavités irrégulières, qui pénètrent profondément dans la masse et dont les parois sont couvertes de petits points et de petits filaments

brillants. La plupart de ces points sont plus au moins globuleux; semblables à des grains de sable; quant à des particules nettement cristallines, on n'en trouve que rarement et presque jamais à un grossissement inférieur à 150/1. Les surfaces de cassure de la variété rouge ou violette du carbon présentent des cavités beaucoup plus nombreuses et plus grandes, et les points et filaments brillants, à l'intérieur de ces cavités, sont également plus grands et plus nombreux. Abstraction faite de la couleur et de l'éclat, l'aspect est le même que celui du coke dense et lourd, dans les cavités duquel on voit aussi de semblables saillies et filaments. Il n'est pas difficile de trouver dans cette variété, à un grossissement de 100—150 diamètres, des sommets d'octaèdres nettement conformés. Les surfaces naturelles ont quelquefois une apparence particulière, comme si elles étaient couvertes d'une mince couche de glace; le microscope y fait alors voir, en grand nombre, des octaèdres fortement aplatis (passage au bort ou au diamant cristallisé?).

Dans la variété brune, la couleur est répandue très uniformément sur toute l'étendue de la surface de cassure. L'acide sulfurique chaud enlève un peu de fer, sans changer l'aspect du minéral; il en est de même de l'eau régale et du bisulfate de potassium.

Les surfaces de cassure de l'autre variété sont rarement d'un rouge uniforme; le plus souvent elles sont panachées d'une teinte claire, jaune verdâtre ou jaune grisâtre. J'ai essayé d'extraire la matière colorante au moyen des acides ou du bisulfate de potassium, mais avec aussi peu de succès que pour la variété brune. Selon toute apparence, la matière colorante est fournie par le fer; seulement, la combinaison ferrugineuse qui produit la couleur, et qui en même temps diminue la transparence, n'est probablement pas interposée entre les cristaux et dendrites, mais, au moins en majeure partie, mêlée à leur substance et enveloppée par eux.

Pour vérifier cette supposition, j'ai examiné de la poudre de carbon à la lumière transmise et sous un fort grossissement

(600—800). De minces lamelles auraient été préférables, mais les hommes du métier affirment que le carbon se prête encore moins que le bort au travail sur la meule avec la poudre de diamant. La pulvérisation du carbon s'opère facilement à l'aide de deux plaques d'acier fortement trempé, entre lesquelles on peut réduire le minéral, par le choc du marteau, en poudre aussi fine qu'on le désire. L'eau régale, mise en contact avec cette poudre, dissout un peu de fer, dont une partie provient certainement des plaques d'acier.

Pour obtenir la transparence nécessaire, il faut noyer la poudre dans du baume de Canada et recouvrir le mélange d'une lame de verre.

La variété claire m'a fourni des préparations où plus de la moitié des petits fragments étaient limpides et incolores, les autres en partie limpides et jaunâtres, en partie incolores ou jaunâtres et troublés par une multitude de particules opaques disséminées dans leur masse. Je présume que ces particules sont rouges et consistent en oxyde de fer; elles sont toutefois trop petites pour qu'on puisse acquérir la certitude à cet égard. Probablement cette variété de carbon est donc en majeure partie incolore ou jaunâtre et limpide; çà et là elle est rendue trouble et colorée en rouge ou en rouge violet par de l'oxyde de fer finement divisé.

Il en est un peu autrement de la variété brune. Celle-ci doit être réduite en poudre extrêmement ténue si l'on veut qu'une faible partie, n'allant même pas au-delà de 20 pour cent, devienne transparente. Il va sans dire que dans la substance ainsi divisée on ne retrouvera plus de petits cristaux, comme c'était le cas pour la poudre moins fine du carbon rouge. Les fragments incolores sont rares dans les préparations du carbon brun; la plupart des fragments transparents sont jaunâtres ou brunâtres, et presque tous contiennent des points opaques. Un seul petit fragment était bleu foncé, trois étaient bleu clair et plusieurs offraient des teintes verdâtres pâles.

Les points opaques sont ici beaucoup plus abondants que dans

le carbon rouge; aux bords et angles minces de fragments du reste complètement impénétrables à la lumière, j'ai pu m'assurer que la masse fondamentale est brunâtre et transparente, mais remplie, jusqu'à en devenir opaque, de granulations excessivement fines, noires et brunes. C'est un phénomène tout à fait semblable à celui que présentent une foule de basaltes et de rétinites, par exemple différentes laves basaltiques vitreuses du Gunung Bromo, à Java, qu'il est à peine possible de réduire en préparations transparentes, et dont l'examen montre pourtant, en dernière analyse, qu'elles contiennent une masse vitreuse claire.

Le carbon serait-il aussi formé en partie d'une masse amorphe? C'est là une question que je dois laisser indécise, bien que l'affirmative me paraisse très improbable. La découverte récemment faite par M. Hannay, que le carbone s'obtient à l'état de diamant par la décomposition d'hydrocarbures, pourrait aisément conduire à supposer que le carbon est une masse boursouflée, rendue spongieuse par le dégagement de gaz, de la même manière que cela a lieu pour le coke et pour les scories. Cette supposition, qui s'accorde assez bien avec l'aspect extérieur du carbon, mène immédiatement à l'hypothèse d'une substance amorphe, vitreuse, constituant une modification particulière, simplement temporaire peut-être, du carbone. Mais, l'un des échantillons soumis à mon examen portait la boule de bort noir ci-dessus décrite, et celle-ci passait insensiblement au carbon proprement dit, circonstance qui indique, à mon avis, un rapport entre la formation du bort et celle du carbon. Or, entre les cristaux microscopiques et rudimentaires de la sphère de bort, on ne découvrait aucune trace de substance vitreuse (amorphe).

Je me représente le carbon comme composé, de même que le bort, de petits cristaux et de dendrites cristallins, avec cette seule différence que les petits octaèdres et les filaments cristallins du carbon sont beaucoup plus irrégulièrement enchevêtrés et beaucoup moins serrés les uns sur les autres.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

SUR LES

RELATIONS RÉCURRENTES PÉRIODIQUES

ENTRE LES

COEFFICIENTS DU DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS:

PLUS SPÉCIALEMENT ENTRE LES NOMBRES DE BERNOULLI, AINSI QU'ENTRE QUELQUES NOMBRES ANALOGUES.

PAR

F. J. VAN DEN BERG.

Ce qui suit est extrait d'un Mémoire écrit en hollandais et publié dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences d'Amsterdam (*Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen*, 2e *Reeks*, *Deel* 16, 1e *Stuk*, 1881, p. 74—176). Pour ne pas nuire à l'intelligence du sujet, la première partie de mon travail, la partie générale, a été traduite à peu près sans changements, sauf quelques petites coupures. Dans la seconde partie, au contraire, qui contient l'application de la méthode générale aux nombres de Ber-

noulli et à quelques autres nombres analogues, j'ai, pour abréger, omis en grande partie le développement des calculs, n'en donnant guère que les résultats et renvoyant au Mémoire original pour des détails plus circonstanciés.

Posons $i = \sqrt{-1}$ et $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$, et représentons les n racines de l'équation $\omega^n - 1 = 0$ par ω^k, où l'exposant k doit recevoir successivement toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à $n-1$ inclusivement: parmi ces racines figure donc toujours $\omega^0 = 1$, tandis que, bien qu'on ait toujours $\omega^{\frac{n}{2}} = e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, cependant cette valeur ne fait partie des racines que dans le cas de n pair, c'est-à-dire pour un exposant $\frac{n}{2}$ entier; toutes les autres racines sont complexes. Cela posé, soit $F(x)$ une fonction réelle quelconque, qui, lorsqu'on y remplace x par $\omega^k x$ et qu'on la développe suivant les puissances de ω^k, en observant que $(\omega^k)^n = (\omega^n)^k = 1$, se transforme en

$$F(\omega^k x) = X_0 + \omega^k X_1 + \omega^{2k} X_2 + \text{etc.} + \omega^{(n-1)k} X_{n-1},$$

(où X_l représente, suivant les circonstances, un polynôme fini ou infini en x); la *norme* de cette fonction, c'est-à-dire le produit $F(x)\ F(\omega x)\ F(\omega^2 x) \ldots F(\omega^{n-1} x)$, à représenter par la notation $\prod_{0}^{n-1}{}^{k} F(\omega^k x)$, possède alors une valeur réelle qui peut être écrite sous la forme du déterminant doublement orthosymétrique du $n^{\text{ième}}$ degré

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \ldots X_{n-1} \\ X_{n-1} & X_0 & X_1 \ldots X_{n-2} \\ X_{n-2} & X_{n-1} & X_0 \ldots X_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_1 & X_2 & X_3 \ldots X_0 \end{vmatrix}$$

Cela ressort, entre autres, de ce que ce déterminant, lorsqu'on y multiplie les colonnes successives par 1, ω^k, ω^{2k}, etc., $\omega^{(n-1)k}$ (en tenant de nouveau compte de l'égalité $1 = \omega^{nk}$) et que simultanément on divise par ces mêmes quantités les rangées successives, conserve bien la même valeur, mais prend pourtant la forme modifiée qui résulte du remplacement de chaque X_l par $\omega^{lk} X_l$, c'est-à-dire du remplacement de x par $\omega^k x$; ce déterminant, permettant cette dernière substitution, doit donc, en premier lieu, être une fonction non-seulement de x, mais même de x^n; en outre, la somme des éléments de chaque rangée dans la forme modifiée étant $F(\omega^k x)$, le déterminant lui-même doit être divisible par cette quantité $F(\omega^k x)$, donc aussi par le produit ou la norme $\prod_0^{n-1}{}_k F(\omega^k x)$, et alors, à cause de l'égalité des termes initiaux X_0^n dans le développement du déterminant et du produit, il ne peut être que cette norme elle-même. (Voir aussi, entre autres, R. Baltzer, *Theorie und Anwendung der Determinanten*, 3e éd., 1870, p. 98—104; S. Günther, *Lehrbuch der Determinanten-Theorie*, 1875, p. 93—95).

Au lieu de chercher toutefois, pour une fonction $F(x)$ donnée, à développer cette norme suivant les puissances de x^n, soit à l'aide du déterminant formulé ci-dessus, soit de toute autre manière, il vaut mieux, pour l'objet que nous avons en vue, partir du développement du produit de la norme par la dérivée logarithmique $\frac{F'(x)}{F(x)}$ de $F(x)$, produit encore réel, mais qui est fonction, non plus exclusivement de x^n, mais de x lui-même. Supposons, par exemple, le cas où ce produit admet un développement suivant les puissances ascendantes positives de x, développement qu'on peut alors, en ce qui concerne les coefficients et en vue des calculs ultérieurs, toujours écrire sous la forme

$$\frac{F'(x)}{F(x)} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} F(\omega^k x) = a_1 + 2\, a_2\, x + 3\, a_3\, x^2 + \text{etc.} + n\, a_n\, x^{n-1} + \text{etc.} + (q\, n + p)\, a_{qn+p}\, x^{qn+p-1} + \text{etc.}, \; \ldots \ldots \; (1)$$

(où il faut prendre $q = 0, 1, 2,$ etc. jusqu'à l'infini, tandis que, pour une valeur déterminée de n, p doit seulement être pris $= 1, 2, 3$ etc. jusqu'à n); le développement de la norme elle-même est alors facile à déduire. En effet, le premier membre de (1), c'est-à-dire le produit $F'(x) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} F(\omega^k x)$, n'est autre chose que le premier terme de la fonction dérivée de la norme, par rapport à x, et à l'aide de ce terme on peut successivement écrire les $n-1$ autres termes de cette dérivée: il suffit, pour $k = 1, 2,$ etc. $n-1$, de remplacer x par $\omega^k x$ (ce qui ne change rien à la norme elle-même) et de multiplier chaque fois le résultat par ω^k. Prenant donc la somme de ces n termes, on obtient:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k F'(\omega^k x)}{F(\omega^k x)} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} F(\omega^k x) = \sum_{k=0}^{n-1} \cdot \omega^k \{ a_1 + 2 a_2 \omega^k x + 3 a_3 \omega^{2k} x^2 + \text{etc.} + n a_n \omega^{(n-1)k} x^{n-1} + \text{etc.} + (qn+p) a_{qn+p} \omega^{(qn+p-1)k} x^{qn+p-1} + \text{etc.} \}.$$

On voit que, dans cette somme, le terme général en x^{qn+p-1} se déduit du terme homologue de (1) en multipliant celui-ci par le facteur $\sum_{k=0}^{n-1} \{ \omega^k \cdot \omega^{(qn+p-1)k} \} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \frac{1 - \omega^{np}}{1 - \omega^p}$, c'est-à-dire, toujours par zéro, sauf lorsque $p = n$ même, cas où ce facteur est égal a $\sum_{k=0}^{n-1} 1^k = n$; la somme précédente se réduit donc à

$$\frac{d \,.\, \prod_{k=0}^{n-1} F(\omega^k x)}{d\, x} = n\, \{ n\, a_n\, x^{n-1} + 2\, n\, a_{2n}\, x^{2n-1} + 3\, n\, a_{3n}\, x^{3n-1} + \text{etc.} + q\, n\, a_{qn}\, x^{qn-1} + \text{etc.} \},$$

d'où, par intégration, on obtient pour la norme elle-même:

$$\prod_{k=0}^{n-1} F(\omega^k x) = n\, \{ a_n + \ldots$$

Le développement (1) et par suite le développement (2) étant connus, leur quotient fait connaître le développement de $\frac{F'(x)}{F(x)}$. Ou bien, ce qui revient au même, on peut, en écrivant ce dernier développement sous la forme

$$-\frac{F'(x)}{F(x)} = s_1 + s_2 x + s_3 x^2 + \text{etc.} + s_p x^{p-1} + \text{etc.} + \\ + s_{n+p} x^{n+p-1} + \text{etc.} + s_{qn+p} x^{qn+p-1} + \text{etc.}, \quad \ldots \quad (3)$$

égaler les coefficients de x^{qn+p-1} dans le produit des seconds membres de (2) et de (3) et dans le second membre de (1), pris négativement, ce qui donne, entre les coefficients a (ou plutôt leurs rapports) et s, la relation suivante:

$$a_{qn} s_p + a_{(q-1)n} s_{n+p} + a_{(q-2)n} s_{2n+p} + \text{etc.} + a_{2n} s_{(q-2)n+p} + \\ + a_n s_{(q-1)n+p} + a_0 s_{qn+p} = -\frac{qn+p}{n} a_{qn+p}; \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

si dans cette relation, pour une valeur déterminée de n et pour une valeur déterminée de p satisfaisant à la condition $1 \leq p \leq n$, on fait successivement $q = 0, 1, 2$, etc. jusqu'à l'infini, elle fournit un système de relations récurrentes périodiques entre les coefficients s_p, s_{n+p}, s_{2n+p}, etc. d'un groupe de termes de (3) formé en sautant chaque fois $n - 1$ termes intermédiaires; et par conséquent, appliquée de cette manière aux différentes valeurs 1, 2, 3 etc., n, qui conviennent à p, elle fait connaître tous les systèmes analogues de relations pour tous les groupes analogues.

En outre, le susdit système de $q + 1$ équations linéaires (4), formé pour des valeurs déterminées de n et de p et pour $q = 0, 1, 2$, etc. jusqu'à un q arbitraire inclusivement, donne maintenant l'occasion de résoudre les $q + 1$ coefficients s_p, s_{n+p}, s_{2n+p}, etc., s_{qn+p} comme inconnues, en fonction des coefficients a; on obtient ainsi en général pour s_{qn+p} une fraction, ayant pour dénominateur le déterminant qui est composé de tous les coefficients a des premiers membres des équations et qui, vu

l'absence de tous les éléments à l'un des côtés de la diagonale, se réduit à son terme initial a_0^{q+1}; quant au numérateur de la fraction, il se déduit du dénominateur en y remplaçant la dernière colonne par les seconds membres des équations, de sorte que, portant cette dernière colonne en avant et multipliant en outre le numérateur et le dénominateur par $(-)^{q+1}n$, on obtient, pour le calcul indépendant de s_{qn+p}, le déterminant suivant, du degré $q+1$:

$$(-a_0)^{q+1}.n.s_{qn+p}=\begin{vmatrix} p\,a_p & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (n+p)a_{n+p} & a_n & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ (2n+p)a_{2n+p} & a_{2n} & a_n & a_0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ((q-2)n+p)a_{(q-2)n+p} & a_{(q-2)n} & a_{(q-3)n} & a_{(q-4)n} & a_0 & 0 \\ ((q-1)n+p)a_{(q-1)n+p} & a_{(q-1)n} & a_{(q-2)n} & a_{(q-3)n} & a_n & a_0 \\ (qn+p)a_{qn+p} & a_{qn} & a_{(q-1)n} & a_{(q-2)n} & a_{2n} & a_n \end{vmatrix} \ldots$$

Au sujet de la signification tant des coefficients s que de ceux des coefficients a qui se trouvent dans (2) et dans le premier membre de (4) et qui correspondent par conséquent à $p=n$, on peut encore remarquer ce qui suit. Supposons que la décomposition de $F(x)$ en ses facteurs linéaires, en nombre fini ou infini, donne:

$$F(x)=A(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)(1-\alpha_3 x)(\text{etc.})=A\,.\prod(1-\alpha x);\,..\,(6)$$

par la différentiation logarithmique de cette expression et par l'introduction de la notation $s_p=\sum\alpha^p$, on retrouve la formule:

$$-\frac{F'(x)}{F(x)}=\sum\frac{\alpha}{1-\alpha x}=\sum(\alpha+\alpha^2x+\alpha^3x^2+\text{etc.}+\alpha^p x^{p-1}+\text{etc.})=$$
$$=s_1+s_2x+s_3x^2+\text{etc.}+s_p x^{p-1}+\text{etc.},\,..\,(3)$$

ce qui montre que les coefficients s ne sont autre chose que les

sommes des puissances semblables des racines α de l'équation $F\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$. Mais si, en vertu de la signification des n racines ω^k de l'unité, on considère que (pour un y quelconque) on a toujours $\prod_{0}^{n-1}[k]\,(y-\omega^k)=y^n-1$ et par conséquent, dans le cas présent, $\prod_{0}^{n-1}[k](1-\alpha\omega^k x)=(\alpha x)^n.\prod_{0}^{n-1}[k]\left(\frac{1}{\alpha x}-\omega^k\right)=(\alpha x)^n\left\{\left(\frac{1}{\alpha x}\right)^n-1\right\}=$ $=1-\alpha^n x^n$, la valeur ci-dessus de $F(x)$ nous apprend, en outre, que la norme devient alors :

$$\prod_{0}^{n-1}[k]\,F(\omega^k x)=A^n\,(1-\alpha_1{}^n x^n)\,(1-\alpha_2{}^n x^n)\,(1-\alpha_3{}^n x^n)\,(\text{etc.})=$$
$$=A^n.\prod(1-\alpha^n x^n)\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

d'où il appert que, quoique les autres coefficients a aient une signification moins simple, les coefficients a_0, a_n, a_{2n} etc. qui entrent dans l'équation (2) sont égaux à $\frac{A^n}{n}$ fois l'unité et à $\frac{A^n}{n}$ fois les sommes, prises alternativement négatives et positives, des produits 1 à 1, 2 à 2, etc. des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des racines α sus-nommées.

Quant à savoir si les formules (4) ou (5) peuvent être appliquées avec avantage au calcul effectif, périodique ou par groupes, des valeurs numériques des coefficients s d'une fonction quelconque $f(x)=-\frac{F'(x)}{F(x)}$, cela dépend de la question si, après en avoir déduit $F(x)=e^{-\int f(x)\,dx}$, on réussit à développer directement la fonction (1) suivant des coefficients a assez simples pour qu'ils puissent être employés dans (4) ou (5).

Lorsqu'on s'en tient au cas le plus simple $n=1$, cas où l'équation $\omega^n-1=0$ n'admet d'autre racine ω^k que l'unité

elle-même, et où par conséquent la norme est égale à la fonction $F(x)$ elle-même, tandis que pour p il n'y a alors à tenir compte que de la valeur $p=1$, la formule (1) se transforme en

$$F'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\text{etc.}+(q+1)a_{q+1}x^q+\text{etc.};$$

les équations (2), (6) et (7) se confondent alors en

$$F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\text{etc.}+a_qx^q+\text{etc.}=$$

$$=A(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)(1-\alpha_3x)(\text{etc.})=A\prod(1-\alpha x);$$

l'équation (3) s'écrit sous la forme:

$$-\frac{F'(x)}{F(x)}=s_1+s_2x+s_3x^2+\text{etc.}+s_{q+1}x^q+\text{etc.};$$

et les formules (4) et (5) se réduisent à

$$a_qs_1+a_{q-1}s_2+a_{q-2}s_3+\text{etc.}+a_2s_{q-1}+a_1s_q+a_0s_{q+1}=$$
$$=-(q+1)a_{q+1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4_1)$$

et

$$(-a_0)^{q+1}s_{q+1}=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0\\ 2a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdot & 0 & 0\\ 3a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ (q-1)a_{q-1} & a_{q-2} & a_{q-3} & a_{q-4} & \cdot & a_0 & 0\\ q\,a_q & a_{q-1} & a_{q-2} & a_{q-3} & \cdot & a_1 & a_0\\ (q+1)a_{q+1} & a_q & a_{q-1} & a_{q-2} & \cdot & a_2 & a_1 \end{vmatrix},\ \cdot\ (5_1)$$

qui, comparées aux formules d'Albert Girard et de Newton pour le calcul récurrent des sommes des puissances semblables des racines d'une équation au moyen de ses coefficients, et à

la formule qui s'en déduit pour le calcul indépendant des mêmes sommes, — telles que ces formules se trouvent par exemple dans W. Fiedler, *Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen*, 1862, p. 44 et 47, et dans Günther's *Determinanten-Theorie*, p. 137—138, — ne s'en distinguent en rien, sauf que la notation t, employée par ces auteurs, est ici remplacée par $q+1$.

Comme application de la méthode générale qui précède, proposons-nous de prendre la fonction $f(x) = -\frac{F'(x)}{F(x)}$, dans l'équation (3), de telle sorte qu'elle fasse trouver les relations récurrentes périodiques qui doivent exister entre les nombres de Bernoulli. A cet effet, indiquant avec différents auteurs le $p^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli par B_{2p-1} (notation qui semble mieux appropriée à notre but que la notation B_p employée par d'autres et en elle-même plus simple), introduisant (d'après C. Kramp, *Elémens d'arithmétique universelle*, 1808, p. V—VI) la notation $p! = 1.2.3...p$, et faisant dès l'origine, pour abréger, autant que possible usage du signe Σ, on pourrait considérer ces coefficients comme étant ceux du développement de la fonction

$$-\frac{1}{2}cot\frac{x}{2} = -\frac{1}{x} + \frac{B_1}{2!}x + \frac{B_3}{4!}x^3 + \frac{B_5}{6!}x^5 + \text{etc.} + \frac{B_{2p-1}}{(2p)!}x^{2p-1} + \text{etc} =$$

$$= -\frac{1}{x} + \sum_1^{\infty}{}_p \frac{B_{2p-1}}{(2p)!}x^{2p-1},$$

développement qui, comparé par exemple à celui de $-cot\,x$ lui-même, offrirait déjà l'avantage que ses coefficients ne sont pas affectés, par surcroît, des puissances paires successives du nombre 2. En effet, pour le but que nous visons, la fonction $f(x) = -\frac{1}{2}cot\frac{x}{2}$ fournirait un point de départ admissible.

Néanmoins, pour des raisons développées dans le Mémoire original, et aussi pour se rapprocher davantage, dès le début, de la marche de l'opération dans le cas général, il est préférable de choisir comme fonction génératrice $-\frac{1}{2}\cot\frac{\sqrt{x}}{2}$, ou, en vue d'obtenir une fonction intégrale $F(x)$ simple, encore mieux $f(x) = -\frac{\cot\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}}$. Si, pour donner au premier terme du développement de la cotangente la même forme qu'à tous les suivants et pour obtenir par là l'opération entière ainsi que les résultats sous une forme plus concise, on introduit comme $0^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli la notation $B_{-1} = -1$ (qui d'ailleurs s'accorde bien avec le fait que, dans la formule par laquelle la somme des $(2p)^{\text{ièmes}}$ puissances des nombres naturels de 1 à y est exprimée suivant les puissances décroissantes de y, le terme le plus bas est $(-)^{p-1} B_{2p-1}\, y$), et si l'on remarque en outre que $p! = \frac{(p+1)!}{p+1}$ conduit à la valeur du symbole $0! = 1$, la formule initiale du calcul est:

$$f(x) = -\frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{\cot\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sum_0^{\infty}{}_p \frac{B_{2p-1}}{(2p)!}x^{p-1} \quad . \; . \; . \; (3')$$

De celle-ci on s'élève à

$$F(x) = e^{-\int f(x)dx} = e^{\int \frac{\cos\frac{\sqrt{x}}{2} d\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}} = \sin\frac{\sqrt{x}}{2}; \quad . \; . \; (6')$$

et, cette $F(x)$ ainsi trouvée, il s'agit ensuite essentiellement, d'après la méthode générale, de développer

$$F'(x) \cdot \prod_1^{n-1}{}_k F(\omega^k x) = \frac{\cos\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}} \cdot \prod_1^{n-1}{}_k \sin\frac{\sqrt{\omega^k x}}{2}$$ suivant (1), ou

bien, sans écrire ce développement lui-même, de déterminer les coefficients dans son produit par le numérateur $4\sqrt{x}$. Or, si l'on considère: en premier lieu, que le premier terme de ce produit doit avoir la valeur du produit lui-même pour x infiniment petit, c'est-à-dire la valeur

$$\prod_1^{n-1}{}_k \frac{\sqrt{\omega^k x}}{2} = \frac{\sqrt{\omega^{\frac{n(n-1)}{2}}\, x^{n-1}}}{2^{n-1}} = \frac{\sqrt{(-1)^{n-1}\, x^{n-1}}}{2^{n-1}} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} x^{\frac{n-1}{2}};$$

en second lieu, que, tant dans le facteur $\cos\frac{\sqrt{x}}{2}$ que dans chacun des facteurs $\sin\frac{\sqrt{\omega^k x}}{2}$, et par conséquent aussi dans le produit lui-même, les exposants de x augmentent chaque fois de l'unité; en troisième lieu, que, d'une manière analogue à ce qui a été fait ci-dessus en (1) pour les coefficients a dans le cas général, les coefficients b du produit actuel, bien qu'encore inconnus, peuvent tout d'abord être affectés de facteurs numériques, choisis de façon à s'accorder le mieux, tant avec les valeurs à calculer plus tard, au moins pour $n=1$ jusqu'à $n=6$ inclusivement, qu'avec la forme des formules (4) et (5) dans le présent cas, et choisis aussi, en ce qui concerne les signes, de manière que tous ces coefficients b deviennent positifs; si l'on considère, dis-je, ces divers points, le produit en question peut toujours être écrit sous la forme suivante:

$$\cos\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\prod_1^{n-1}{}_k \sin\frac{\sqrt{\omega^k x}}{2} =$$

$$2\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_0^{\infty}{}_q(-)^q\left\{+\frac{b_{(2q+1)n-1}}{((2q+1)n-1)!}x^{\frac{(2q+1)n-1}{2}} - \frac{b_{(2q+1)n+1}}{((2q+1)n+1)!}x^{\frac{(2q+1)n+1}{2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{b_{(2q+1)n+3}}{((2q+1)n+3)!}x^{\frac{(2q+1)n+3}{2}} - \text{etc.} - \frac{b_{(2q+3)n-3}}{((2q+3)n-3)!}x^{\frac{(2q+3)n-3}{2}}\right\} =$$

$$2\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_0^{\infty}{}_q(-)^q\left\{\sum_0^{n-1}{}_p \begin{Bmatrix}(\text{pour } p=0) & + \\ (\text{pour } p=1 \text{ jusqu'à } n-1) & -\end{Bmatrix}\frac{b_{(2q+1)n+2p-1}}{((2q+1)n+2p-1)!}x^{\frac{(2q+1)n+2p-1}{2}}\right\}, \quad (1')$$

où, sous le premier signe Σ, il faut prendre comme précédemment $q=0, 1, 2$, etc. jusqu'à l'infini, tandis que, sous le second signe Σ, pour une valeur déterminée de n, il faut maintenant, eu égard aussi à (8'), donner à p successivement les valeurs 0, 1, 2, etc., $n-1$, au lieu des valeurs antérieures 1, 2, 3, etc., n, en n'affectant le signe + qu'au premier terme, indiqué par $p=0$, et écrivant le signe — devant chacun des $n-1$ autres termes.

Avec une légère modification, spécifiée dans le Mémoire original et devenue nécessaire parce qu'on n'a plus affaire maintenant à la fonction toujours rationnelle (1), mais à la fonction (1'), irrationnelle au moins pour les valeurs paires de n, on peut appliquer de nouveau le mode opératoire suivi ci-dessus pour conclure de (1') au développement (2) de la norme dans le cas actuel. De cette manière, en effet, on trouve d'abord:

$$\frac{d.\prod_0^{n-1}{}_k \sin\frac{\sqrt{\omega^k x}}{2}}{dx}=\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_0^\infty{}_q(-)^q\frac{b_{(2q+1)n-1}}{((2q+1)n-1)!}.\frac{n}{2}x^{\frac{(2q+1)n}{2}-1},$$

de sorte que la norme elle-même peut maintenant être écrite, à volonté, sous l'une des deux formes suivantes:

$$\prod_0^{n-1}{}_k \sin\frac{\sqrt{\omega^k x}}{2}=\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_0^\infty{}_q(-)^q\frac{b_{(2q+1)n-1}}{(2q+1).((2q+1)n-1)!}x^{\frac{(2q+1)n}{2}}=$$

$$=n\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_0^\infty{}_q(-)^q\frac{b_{(2q+1)n-1}}{((2q+1)n)!}x^{\frac{(2q+1)n}{2}}, \quad \ldots (2')$$

où il n'y a pas de constante à ajouter, comme nous l'apprend la supposition de x infiniment petit dans les deux membres, supposition qui en outre, de même que ci-dessus pour (1'), fait connaître $b_{n-1}=\frac{(n-1)!}{2}$.

Si l'on écrit maintenant que le produit du premier ou du second membre de (2') par le dernier membre de $4\sqrt{x}$ fois (3') est égal au dernier membre, pris négativement, de (1'), on peut, r désignant une des valeurs de la série 0 à q inclusivement, remplacer dans le terme général de (2') l'indicateur q par $q-r$ et dans celui de (3') l'indicateur p par $rn+p$, afin de pouvoir égaler la somme des coefficients de tous les termes homologues, qui pour $r=0, 1, 2,$ etc., q, proviennent d'un produit de la forme $\left\{\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} . x^{\frac{(2q-2r+1)n}{2}}\right\}\left\{4\sqrt{x}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,x^{rn+p-1}\right\}$, au coefficient pris négativement de $2\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} x^{\frac{(2q+1)n+2p-1}{2}}$ dans (1'). Effectuant cette opération, multipliant en outre par $(-)^q.((2q+1)n+2p-1)!$ ou par $(-)^q . \frac{((2q+1)n+2p)!}{n}$ suivant qu'on veut faire usage de la première ou de la seconde forme de (2'), et introduisant en général la notation $\binom{s}{t}=\frac{s!}{t!\,(s-t)!}=\binom{s}{s-t}$ pour les coefficients égaux $(t+1)^{\text{ième}}$ et $(s-t+1)^{\text{ième}}$ de la puissance s du binôme, on obtient les deux formes suivantes de la relation récurrente périodique entre les nombres de Bernoulli, exprimée au moyen des coefficients b du développement (1'):

$$\sum_{0}^{q}{}_r(-)^r\binom{(2q+1)n+2p-1}{(2q-2r+1)n-1}\frac{b_{(2q-2r+1)n-1}}{2q-2r+1}B_{2rn+2p-1}=$$
$$=\left.\begin{matrix}(p=0) & - \\ (p=1 \text{ jusqu'à } n-1) & +\end{matrix}\right\} b_{(2q+1)n+2p-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4')$$

et

$$\sum_{0}^{q}{}_r(-)^r\binom{(2q+1)n+2p}{(2q-2r+1)n}\, b_{(2q-2r+1)n-1}\; B_{2rn+2p-1}=$$
$$=\left.\begin{matrix}(p=0) & - \\ (p=1 \text{ jusqu'à } n-1) & +\end{matrix}\right\}\frac{(2q+1)n+2p}{n}\, b_{(2q+1)n+2p-1}\,; \quad (4'')$$

l'expression placée sous le signe Σ, dans le coefficient binomial

de laquelle on peut aussi, si l'on veut, remplacer l'indicateur inférieur par $2rn+2p$, appartient au terme $(r+1)^{\text{ième}}$, ou terme général, parmi les $q+1$ termes dont se compose le premier membre de la relation ou équation $(q+1)^{\text{ième}}$ pour le $(p+1)^{\text{ième}}$ des n groupes différents que forment les nombres de Bernoulli, en sautant chaque fois $n-1$ d'entre eux. Bien que la seconde de ces deux formes équivalentes (4′) et (4″) soit algébriquement plus simple que la première, en tant du moins que chacun des coefficients b de son premier membre s'y présente en entier et non par parties, il est probable, par contre, que cette seconde forme n'est pas toujours la plus simple pour les calculs numériques.

Ainsi qu'il est indiqué dans les formules (4′) et (4″), le signe — n'y doit être donné au second membre que pour la seule valeur $p=0$, c'est-à-dire pour le premier des n groupes dont il vient d'être question. Si l'on veut, pour ce cas, exclure le nombre bernoullien impropre B_{-1}, qui a été introduit uniquement afin de pouvoir comprendre sous une même forme commune (4′) ou (4″) les relations pour tous les groupes, on obtient, en substituant $B_{-1}=-1$ et en changeant les signes:

$$\sum_{1}^{q} {}_r (-)^{r-1}\binom{(2q+1)n-1}{(2q-2r+1)n-1}\frac{b_{(2q-2r+1)n-1}}{2q-2r+1}B_{2rn-1}=$$
$$=\frac{2q}{2q+1}b_{(2q+1)n-1}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(4'_0)$$

ou

$$\sum_{1}^{q} {}_r (-)^{r-1}\binom{(2q+1)n}{(2q-2r+1)n}b_{(2q-2r+1)n-1}\,B_{2rn-1}=$$
$$=2q\,b_{(2q+1)n-1},\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(4''_0)$$

où l'on peut de nouveau, pour le coefficient binomial inférieur, écrire aussi $2rn$. Ces relations particulières, au lieu d'être écrites, comme précédemment dans le cas du maintien de B_{-1},

c'est-à-dire pour $p=0$, en tête des relations pour les n groupes différents, devraient proprement être écrites maintenant, pour $p=n$, à la fin de ces relations : auquel cas il serait d'ailleurs régulier, afin de faire accorder autant que possible leur forme avec celle des relations pour $p=1$ jusqu'à $p=n-1$ inclusivement, de remplacer encore, dans ces équations $(4'_0)$ et $(4''_0)$, q et r par $q+1$ et $r+1$, et d'écrire en conséquence, au lieu de $(4''_0)$ par exemple :

$$\sum_0^q r(-)^r \binom{(2q+3)n}{(2q-2r+1)n} b_{(2q-2r+1)n-1} \; B_{2rn+(2n-1)} =$$
$$= 2(q+1)\, b_{(2q+3)n-1}.$$

Ajoutons que, quoique cette dernière forme concorde du reste entièrement avec ce que fournirait l'application de l'équation $(4'')$ elle-même pour $p=n$, cette application n'est nullement permise, car elle donnerait dans le second membre le facteur fautif $2q+3$, au lieu du facteur effectif $2(q+1)$. Sous ce rapport au moins, la régularité dans les n groupes, de $p=1$ jusqu'à $p=n$ inclusivement, serait donc rompue justement pour ce dernier groupe, et il vaut par conséquent mieux s'en tenir à l'usage des n groupes $p=0$ jusqu'à $p=n-1$ inclusivement, suivant l'équation $(4')$ ou $(4'')$.

En faisant, soit dans l'équation $(4')$ ou dans l'équation $(4'')$, successivement $q=0$, 1, 2, etc., jusqu'à une valeur arbitraire q inclusivement, on peut, à l'aide des $q+1$ équations ainsi obtenues, qui contiennent $+B_{2p-1}$, $-B_{2n+2p-1}$, $+B_{4n+2p-1}$, etc., $(-)^q B_{2qn+2p-1}$ comme $q+1$ inconnues, établir une formule générale pour le calcul indépendant du nombre bernoullien quelconque $B_{2qn+2p-1}$. C'est ce qui a été effectué dans le Mémoire original, où l'on a trouvé ainsi, en opérant de la même manière que ci-dessus pour le passage de la relation générale (4) à la relation (5), ce coefficient $B_{2qn+2p-1}$ sous deux formes différentes d'un déterminant.

Ainsi qu'il a été dit, quand on veut appliquer l'équation (4) ou (4") au calcul effectif des nombres de Bernoulli, il s'agit avant tout de connaître les valeurs numériques des coefficients b qui entrent dans (1'). Pour déterminer celles-ci, on peut, par exemple de la manière suivante, établir en premier lieu des formules par lesquelles le produit des sinus d'un nombre quelconque d'arcs ou d'angles arbitraires soit exprimé en fonction des sinus ou des cosinus des sommes algébriques de ces arcs; puis, en second lieu, des formules par lesquelles les sommes correspondantes de ces derniers sinus ou cosinus soient successivement réduites à celles pour un plus petit nombre d'arcs. En posant

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} + \text{ etc. } + \frac{x_n}{2} = \sum_1^n{}^k \frac{x_k}{2} = X, \text{ on trouve, en effet,}$$

pour n impair:

$$(-)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \prod_1^n{}^k sin \frac{x_k}{2} =$$

$$= sin\, X - \sum sin\,(X - x_1) + \sum sin\,(X - x_1 - x_2) - \text{etc.} +$$
$$+ (-)^{\frac{n-1}{2}} \sum sin\,(X - x_1 - x_2 - \text{etc.} - x_{\frac{n-1}{2}}), \quad . \; . \; . \; (8_a)$$

et pour n pair:

$$(-)^{\frac{n}{2}} 2^{n-1} \prod_1^n{}^k sin \frac{x_k}{2} =$$

$$= cos\, X - \sum cos\,(X - x_1) + \sum cos\,(X - x_1 - x_2) - \text{ etc. } +$$
$$+ (-)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2} \sum cos\,(X - x_1 - x_2 - \text{etc.} - x_{\frac{n}{2}}), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8_b)$$

formules où les signes Σ ont rapport à toutes les combinaisons des n arcs x, pris 1 à 1, 2 à 2, etc., $\frac{n-1}{2}$ à $\frac{n-1}{2}$ ou bien $\frac{n}{2}$ à $\frac{n}{2}$, et qui ont été données aussi, entre autres, par J. W. L. Glaisher, dans *The London etc. philosophical magazine*, 5e sér., vol. 6, n°. 38, nov. 1878, p. 335—337.

Veut-on que chacune des formules (8_a) et (8_b), trouvées pour les produits des sinus, puisse être employée directement au développement du premier membre de (1′), il faut commencer par faire dans celui-ci la distinction, jusqu'ici superflue, entre le cas de n impair et celui de n pair. Quand n est impair, on trouve que dans ce premier membre tous les facteurs ω^k peuvent être portés en avant des signes radicaux, de sorte que, si dans la formule (8_a) on prend $x_1 = \pi + \sqrt{x}$ et de plus, pour $k = 2$, 3, etc., n, chaque fois $x_k = \omega^{k-1}\sqrt{x}$, cette formule, sauf division par 2^{n-1}, donne déjà un développement du premier membre de (1′), savoir:

$$(-)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \cos \frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \prod_{1}^{n-1} \sin \frac{\omega^k \sqrt{x}}{2} =$$

$$= 1 - \sum \cos x_1 + \sum \cos (x_1 + x_2) - \text{etc.} +$$

$$+ (-)^{\frac{n-1}{2}} \sum \cos (x_1 + x_2 + \text{etc.} + x_{\frac{n-1}{2}}) \quad . \; . \; . \quad (8'_a)$$

Quand au contraire n est pair, on reconnaît que la formule (8_b) ne pourrait être employée au même usage qu'au prix de calculs assez laborieux. Aussi paraît-il préférable de borner l'emploi direct des formules (8) au cas de n impair, et, quant aux coefficients b dans le développement du premier membre de (1′) pour n pair, de les déduire, d'une manière qui sera indiquée plus loin, des coefficients pour n impair.

Passant au développement ultérieur de chacun des termes du second membre de ($8'_a$), on peut utiliser à cette fin la formule

(4_1) de Girard et de Newton, déduite ci-dessus, comme cas particulier $n=1$, de la relation générale (4), formule dans laquelle on a, pour un nombre quelconque de quantités arbitraires α et pour un coefficient arbitraire A, $a_q = (-)^q A \sum \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_q$ et $s_q = \sum \alpha^q$. En effet, si pour le but actuel on admet dans cette formule n quantités α, déterminées en général par $\alpha_k = e^{ix_k} = \cos x_k + i \sin x_k$, et qu'on introduise les notations $C_q = \sum \cos(x_1 + x_2 + \text{etc.} + x_q)$, $S_q = \sum \sin(x_1 + x_2 + \text{etc.} + x_q)$, et $c_q = \sum_1^n {}^k \cos q x_k$, $s_q = \sum_1^n {}^k \sin q x_k$ (cette dernière étant donc à distinguer de s_q dans (4_1) même), on a, divisant (4_1) par A, à y remplacer $\frac{a_q}{A}$ par

$(-)^q \sum e^{i(x_1+x_2+\text{etc.}+x_q)} = (-)^q \sum \{\cos(x_1+x_2+\text{etc.}+x_q) + i \sin(x_1 + x_2 + \text{etc.} + x_q)\} = (-)^q (C_q + i S_q)$, et s_q par $\sum_1^n {}^k e^{iqx_k} = \sum_1^n {}^k (\cos q x_k + i \sin q x_k) = c_q + i s_q$, ce qui, après multiplication par $(-1)^q$ et remplacement de q par $q-1$, donne la formule

$$q\,(C_q + i S_q) = \sum_1^q {}^r (-)^{r-1} (c_r + i s_r)(C_{q-r} + i S_{q-r}),$$

qui se dédouble en les deux formules de réduction

$$q\,C_q = \sum_1^q {}^r (-)^{r-1} (c_r C_{q-r} - s_r S_{q-r}) \ldots\ldots \quad (9_a)$$

et

$$q\,S_q = \sum_1^q {}^r (-)^{r-1} (c_r S_{q-r} + s_r C_{q-r}), \ldots\ldots \quad (9_b)$$

où, puisque $C_0 + i\,S_0 = \frac{a_0}{A} = 1$, il faut prendre $C_0 = 1$ et $S_0 = 0$. Par l'application réitérée de ces deux dernières formules, — qui entre autres fournissent aussi, quand on y pose $n = 2$ et $q = 2$ puis en outre $x_1 = x_2$, les formules goniométriques fondamentales pour $\cos(x_1 + x_2)$ et $\sin(x_1 + x_2)$, — on est donc en état d'exprimer les valeurs de C_q pour $q = 1, 2$, etc., $\frac{n-1}{2}$, c'est-à-dire précisément les termes du second membre de $(8'_a)$, exclusivement en fonction des sommes c_q et s_q, qui dans le présent cas, en vue du développement de (1'), sont plus faciles à calculer: car on a dans ce cas, en observant que n est impair et que les arcs x_k ont alors les valeurs données ci-dessus,

$$c_q = \sum_1^n{}^k \cos q\,x_k = \cos q\,(\pi + \sqrt{x}) + \sum_1^{n-1}{}^k \cos q\,\omega^k\sqrt{x} = \left\{\begin{aligned} &= -\,2\cos q\sqrt{x} + \sum_0^{n-1}{}^k \cos q\,\omega^k\sqrt{x}, \text{ pour } q \text{ impair} \\ &= \sum_0^{n-1}{}^k \cos q\,\omega^k\sqrt{x}, \text{ pour } q \text{ pair} \end{aligned}\right\} \quad . \ . (10_a)$$

$$\text{et } s_q = \sum_1^n{}^k \sin q\,x_k = \sin q\,(\pi + \sqrt{x}) + \sum_1^{n-1}{}^k \sin q\,\omega^k\sqrt{x} = \left\{\begin{aligned} &= -\,2\sin q\sqrt{x} + \sum_0^{n-1}{}^k \sin q\,\omega^k\sqrt{x}, \text{ pour } q \text{ impair} \\ &= \sum_0^{n-1}{}^k \sin q\,\omega^k\sqrt{x}, \text{ pour } q \text{ pair} \end{aligned}\right\}, \ . (10_b)$$

où l'on trouve ensuite, après réduction, que

$$\sum_0^{n-1}{}^k \cos q\,\omega^k\sqrt{x} = n\sum_0^{\infty}{}^r (-)^r \frac{q^{2rn}}{(2\,r\,n)!}x^{rn} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (11_a)$$

et

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{k} \sin q\,\omega^k \sqrt{x} = (-)^{\frac{n-1}{2}} n \sum_{0}^{\infty}{}_{r} (-)^r \frac{q^{(2r+1)n}}{((2r+1)n)!} x^{\frac{(2r+1)n}{2}} \quad . . (11_b)$$

Bien que la voie se trouve ainsi tracée pour développer réellement, suivant les puissances ascendantes de x, le second membre de l'équation $(8'_a)$, déduite pour une valeur impaire quelconque de n, et par suite aussi le second membre de $(1')$, il n'en est pas moins vrai que déjà pour une valeur relativement petite de n, par exemple pour $n = 7$, auquel cas on devrait aller dans (9) jusqu'à $q = \frac{n-1}{2} = 3$, les opérations deviennent très pénibles et la loi des coefficients b assez compliquée. Aussi, dans ce qui suit, ne calculerons-nous ces coefficients que pour chacun des cas $n = 1$ jusqu'à $n = 6$ inclusivement: ajoutons que, comme pour $n = 1$, 2 et 3 le développement direct de $(1')$ paraît être le plus facile, et comme pour $n = 4$ et 6 les coefficients b se déduisent le mieux, suivant la formule générale de duplication (12) que nous allons donner, de ceux pour $n = 2$ et 3, la méthode générale exposée ci-dessus ne sera appliquée en réalité que pour $n = 5$.

La formule de duplication dont il s'agit, — par laquelle, dans le cas d'un indicateur de période n pair, les coefficients b correspondants peuvent être exprimés directement en fonction des coefficients, à désigner par b', qui correspondent à l'indicateur de période, soit pair soit impair, $\frac{n}{2}$, — a été obtenue, dans le Mémoire original, en regardant pour n pair le premier membre de $(1')$ comme résultant de la multiplication du produit de tous ses facteurs de rang impair par le produit de tous ses facteurs de rang pair, et en exprimant, par l'application de l'équation $(1')$ elle-même et de $(2')$ à $\frac{n}{2}$ au lieu de à n, la valeur de chacun de ces produits en fonction des coefficients b'. Cette formule, que nous donnerons ici sans démonstration, est la suivante:

$$b_{(2q+1)n+2p-1} = \left\{ \begin{matrix} (p = 0 \text{ jusqu'à } \tfrac{n}{2}) & + \\ (p = \tfrac{n}{2}+1 \text{ jusqu'à } n-1) & - \end{matrix} \right\} n \sum_{0}^{\leq 2q+\frac{p}{\frac{1}{2}n}} r \, (-)^{q-r} \binom{(2q+1)n+2p-1}{(2r+1)\frac{n}{2}} b'_{(2r+1)\frac{n}{2}-1} \cdot b'_{(4q-2r+1)\frac{n}{2}+2p-1} \ldots (12)$$

Après ces considérations générales, passons, ainsi que nous l'avons annoncé, au calcul détaillé des coefficients b pour les six premières valeurs de l'indicateur de période n.

Pour $n = 1$, auquel cas il n'y a à tenir compte que de la seule valeur $p = 0$, l'équation générale (1') prend, si l'on met le dernier membre en avant et qu'on développe le premier, la forme

$$2 \sum_{0}^{\infty} q \, (-)^q \frac{b_{2q}}{(2q)!} x^q = \cos \frac{\sqrt{x}}{2} = \sum_{0}^{\infty} q \, (-)^q \frac{x^q}{2^{2q} \cdot (2q)!},$$

de sorte qu'on a alors immédiatement le coefficient

$$b_{2q} = \frac{1}{2^{2q+1}}.$$

Bien que, d'après cela, on pût employer la relation (4''), après multiplication par 2^{2q+1}, sous la forme

$$\sum_{0}^{q} r \, (-)^r \binom{2q+1}{2r} 2^{2r} B_{2r-1} = -(2q+1),$$

il convient mieux, justement parce que dans le cas actuel il n'existe que le seul groupe indiqué par $p = 0$, qui embrasse maintenant l'ensemble des nombres de Bernoulli, d'écrire le groupe unique de rela-

tions récurrentes sous les formes $(4'_0)$ ou $(4''_0)$, établies pour ce $p=0$. Si l'on s'en tient par exemple à la seconde de ces formes, qu'on y pose également $n=1$ et pour b les valeurs qui viennent d'être trouvées, et qu'on multiplie par 2^{2q}, cette forme donne la relation

$$\sum_{1}^{q} {}_r (-)^{r-1}\binom{2q+1}{2r} 2^{2r-1} B_{2r-1} = q, \quad \ldots \quad (4''_0 \text{ pour } n=1)$$

qui d'ailleurs, si l'on n'avait pas voulu la faire ressortir du cas général de n quelconque, mais qu'on se fût borné dès le début à l'examen du cas $n=1$, aurait été trouvée immédiatement en opérant le développement de l'identité

$$\sin x \,.\, \frac{1}{2} \cot x = \frac{1}{2} \cos x,$$

égalant entre eux les coefficients de x^{2q} dans les deux membres, et multipliant le résultat par $(-)^q\,(2q+1)!$

De cette relation on peut maintenant tirer la formule suivante en forme d'un déterminant du degré q:

$$\prod_{0}^{q} {}_r (2r+1)\,.\,2^{2q-1} B_{2q-1} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \binom{3}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \binom{5}{2} & \binom{5}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & \binom{7}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q-1 & \binom{2q-1}{2} & \binom{2q-1}{4} & \binom{2q-1}{6} & \cdots & \binom{2q-1}{2q-2} \\ q & \binom{2q+1}{2} & \binom{2q+1}{4} & \binom{2q+1}{6} & \cdots & \binom{2q+1}{2q-2} \end{vmatrix}, \ldots (5''_0 \text{ pour } n=1)$$

qui ne présente qu'une légère différence de forme avec la solution tirée par H. Nägelsbach (*Zur independenten Darstellung der Bernoullischen Zahlen*, dans Schlömilch, *Zeitschrift für Mathematik etc.*, 19e année, 1874, p. 229, formule (42)) de sa formule (34), obtenue d'une tout autre manière (Voir aussi Günther, *Determinanten-Theorie*, p. 127—130). Si de la seconde colonne on retranche le triple de la première, la formule précédente se simplifie encore, à cause de $\binom{2q+1}{2} - 3q = 2^2\binom{q}{2}$, et donne la suivante, du degré $q-1$:

$$\prod_{0}^{q} r\,(2r+1)\,.\,2^{2q-3}B_{2q-1} =$$

$$= \begin{vmatrix} \binom{2}{2} & \binom{5}{4} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{3}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{4}{2} & \binom{9}{4} & \binom{9}{6} & \binom{9}{8} & \vdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{q-1}{2} & \binom{2q-1}{4} & \binom{2q-1}{6} & \binom{2q-1}{8} & \vdots & \binom{2q-1}{2q-2} \\ \binom{q}{2} & \binom{2q+1}{4} & \binom{2q+1}{6} & \binom{2q+1}{8} & \vdots & \binom{2q+1}{2q-2} \end{vmatrix};$$

mais on ne peut aller plus loin, et répéter une pareille opération, sans voir prendre une forme moins simple à quelques-uns des éléments du déterminant, de degré inférieur, qu'on obtiendrait ainsi.

Avant de quitter le cas de $n = 1$, nous communiquerons encore, bien qu'elles ne découlent pas directement de l'application de la méthode générale qui précède, diverses relations récurrentes, du reste déjà connues pour la plupart, dont il a été traité plus en détail dans le Mémoire original. Ce sont

essentiellement les suivantes. En premier lieu, du développement de l'identité

$$(1 + \cos x) \cdot \frac{1}{2} \cot x = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x$$

on déduit la relation

$$\sum_{1}^{q-1} {}^{r} (-)^{r-1} \binom{2q}{2r} 2^{2r-1} B_{2r-1} + (-)^{q-1} (2^{2q} - 1) B_{2q-1} = \frac{2q-1}{2},$$

la même qui figure, comme formule (35), à la page 228 du Mémoire de M. Nägelsbach. En second lieu, de

$$\sin x \cdot \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos x),$$

on tire de même:

$$\sum_{1}^{q} {}^{r} (-)^{r-1} \binom{2q+1}{2r} B_{2r-1} = \frac{2q-1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4^{*})$$

Cette relation récurrente — à coup sûr une des plus simples parmi celles qui contiennent tous les nombres de Bernoulli successifs — n'est autre que celle qu'on trouve fréquemment citée (par exemple, chez G. S. Klügel, *Mathematisches Wörterbuch*, 1e Abth., 1er Theil, 1803, p. 253, et *Supplemente*, 1e Abth., 1833, p. 55—80; chez S. F. Lacroix, *Calcul différentiel et calcul intégral*, 2e éd., T. 3, 1819, p. 84; chez R. Lobatto, *Integraal-rekening*, 1852, p. 357, note) comme ayant été remarquée pour la première fois par A. de Moivre, *Miscellanea analytica*, 1730, *Supplem.* p. 6; il me semble toutefois que Jacques Bernoulli lui-même, p. 97—98 de son *Ars conjectandi*, 1713, non-seulement l'a employée pour le calcul de ses cinq premiers nombres, mais au fond l'a même mentionnée en général, il est vrai sans démonstration, ce qui d'ailleurs est aussi le cas pour de Moivre. Troisièmement, l'identité

$$(1 - \cos x) \cdot \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x$$

fournit, de la même manière, la relation

$$\sum_{1}^{q} {}^{r} (-)^{r-1} \binom{2q+2}{2r} B_{2r-1} = q, \quad \ldots\ldots \quad (4^{**})$$

qui, si l'on en retranche (4*), donne encore

$$\sum_{1}^{q} {}_{r} (-)^{r-1} \binom{2q+1}{2r-1} B_{2r-1} = \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire la formule simple que M. Nägelsbach, p. 229, formule (41), a trouvée d'une manière toute différente, et qui d'ailleurs, indépendamment de (4*) et de (4**), apparaît aussi directement si l'on multiplie par $(-)^{q+1}(2q+1)!$ les coefficients de x^{2q+1}, égalés entre eux, dans les deux membres du développement de l'identité

$$(1 - \cos x) . \frac{d\left(-\frac{x}{2} \cot \frac{x}{2}\right)}{dx} = \frac{1}{2}(-\sin x + x).$$

On obtient encore, soit au moyen de

$$(1 - \cos x) . \frac{d\left(-\frac{1}{2} \cot \frac{x}{2}\right)}{dx} = \frac{1}{2},$$

soit en retranchant $(2q + 2)$ fois (4*) de $(2q + 1)$ fois (4**), la relation

$$\sum_{1}^{q} {}_{r} (-)^{r-1} (2r-1) \binom{2q+2}{2r} B_{2r-1} = 1.$$

Ensuite, de

$$\frac{\sin 2x}{2} . \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 + \cos 2x}{2} + \cos x \right\},$$

on peut déduire

$$\sum_{1}^{q} {}_{r} (-)^{r-1} \binom{2q+1}{2r} 2^{2q-2r} B_{2r-1} = \frac{(2q+1)(2^{2q-1}+1) - 2^{2q+1}}{2}.$$

Dans un supplément au Mémoire original, de l'identité, valable pour α et β quelconques,

$$\{\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\} . \frac{1}{2} \cot \alpha x = \frac{1}{2} \{\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\}$$

on a encore obtenu, en y faisant $\alpha = 1$ et $\beta = i$, une couple de relations qui se distinguent de toutes les précédentes en ce qu'elles sont affectées de signes qui ne changent pas chaque fois, mais seulement de deux en deux termes, à savoir:

$$\text{pour } q \text{ impair: } \sum_1^q {}_r \left\{ \begin{array}{l} (r \text{ impair}) (-)^{\frac{r-1}{2}} \\ (r \text{ pair}) \ (-)^{\frac{r}{2}} \end{array} \right\} \binom{2q+1}{2r} 2^r B_{2r-1} = 1,$$

$$\text{et pour } q \text{ pair: } \sum_1^q {}_r \left\{ \begin{array}{l} (r \text{ impair}) (-)^{\frac{r-1}{2}} \\ (r \text{ pair}) \ (-)^{\frac{r-2}{2}} \end{array} \right\} \binom{2q+1}{2r} 2^{r-1} B_{2r-1} = q;$$

et de plus, en faisant, pour φ quelconque, $\alpha = \cos \varphi$ et $\beta = i \sin \varphi$, on a obtenu, comme exemple de relations à coefficients goniométriques,

$$\sum_1^q {}_r (-)^{r-1} \binom{2q+1}{2r} (2 \cos \varphi)^{2r} \cos (2q - 2r + 1) \varphi \,.\, B_{2r-1} =$$
$$= 2q \cos \varphi \cos 2q \varphi + \sin \varphi \sin 2q \varphi.$$

Enfin, j'ai montré comment les formules (4*) et (4**) fournissent aussi, sans beaucoup de peine, les remarquables relations que M. A. Stern (*Beiträge zur Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen*, dans *Abhandl. der Kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, T. 23, 1878, p. 7—8) a fait connaître, et qui se distinguent de toutes les autres de la même espèce en ce que, pour le calcul d'un nombre bernoullien quelconque, elles ne contiennent pas tous les nombres précédents, mais seulement quelques-uns d'entre eux, immédiatement antérieurs au nombre en question; j'ai également montré comment, au moyen des déterminants trouvés pour les nombres de Bernoulli, on peut en obtenir d'analogues pour les coefficients des tangentes et des cosécantes, le second de ces déterminants

étant le même qui est donné, avec plusieurs autres formules semblables, à la page 12, N°. 4, de J. Hammond, *On the relation between* Bernoulli's *numbers and the binomial coëfficients*, dans *Proceedings of the London mathematical society*, Vol. 7, 1875—1876, p. 9—14.

Dans le cas de $n=2$ ou $\omega^2-1=0$, cas où il faut prendre $\omega=e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$, par conséquent $\sqrt{\omega}=i$, et où il n'y a à tenir compte que de $p=0$ et de $p=1$, l'équation générale (1') donne

$$2\left(\frac{i}{2}\right)\sum_{0}^{\infty}{}_q(-)^q\left\{+\frac{b_{4q+1}}{(4q+1)!}x^{\frac{4q+1}{2}}-\frac{b_{4q+3}}{(4q+3)!}x^{\frac{4q+3}{2}}\right\}=$$

$$=\cos\frac{\sqrt{x}}{2}\sin\frac{i\sqrt{x}}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{(1+i)\sqrt{x}}{2}-\sin\frac{(1-i)\sqrt{x}}{2}\right\}=$$

$$=\frac{i}{2}\left\{\sum_{0}^{\infty}{}_q\frac{(-)^q x^{\frac{4q+1}{2}}}{2^{2q}(4q+1)!}+\sum_{0}^{\infty}{}_q\frac{(-)^{q+1}x^{\frac{4q+3}{2}}}{2^{2q+1}(4q+3)!}\right\}.$$

En égalant entre eux les coefficients correspondants du premier et du dernier membre de cette équation, on trouve donc immédiatement, pour le cas de $n=2$, les valeurs

$$b_{4q+1}=\frac{1}{2^{2q+1}},$$

$$b_{4q+3}=\frac{1}{2^{2q+2}},$$

dont la substitution pour $p=0$ et pour $p=1$ dans (4'') donne, après multiplication par 2^{2q+1} et par 2^{2q+2}, les deux relations récurrentes:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{4q+2}{4r}2^{2r}\,B_{4r-1} &= -\frac{4q+2}{2},\\ \sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{4q+4}{4r+2}2^{2r+1}\,B_{4r+1} &= \frac{4q+4}{2}.\end{aligned}\right\}\;\ldots\;(4^{o}\text{ pour } n=2)$$

Indépendamment de cette application de la méthode générale, on peut encore déduire ici, des identités

$$\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\pm\frac{i}{2}\cot\frac{ix}{2}=\frac{2\,(\sin ix\pm i\sin x)+(1\pm i)\sin(1+i)\,x-(1\mp i)\sin(1-i)\,x}{2\,\{\cos(1-i)\,x-\cos(1+i)\,x\}}$$

les deux relations récurrentes un peu plus compliquées

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{4q+2}{4r}2^{2q-2r}\,B_{4r-1}=-\frac{4q+2}{4}\,\{2^{2q}+(-1)^{q}\}$$

et

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{4q+4}{4r+2}2^{2q-2r}\,B_{4r+1}=\frac{4q+4}{4}\,\{2^{2q+1}-(-1)^{q}\},$$

ainsi que, des identités

$$\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\pm\frac{i}{2}\cot\frac{ix}{2}=\frac{2\,(\sin x\pm i\sin ix)-(1\pm i)\sin(1+i)\,x-(1\mp i)\sin(1-i)\,x}{2\,\{2\,(1-\cos x-\cos ix)+\cos(1+i)\,x+\cos(1-i)\,x\}},$$

les deux relations encore plus compliquées

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{4q+4}{4r}\{2^{2q-2r+1}+(-1)^{q-r}\}\,B_{4r-1}=-\frac{4q+4}{4}\,\{2^{2q+1}+(-1)^{q}\}$$

et

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{4q+6}{4r+2}\{2^{2q-2r+1}+(-1)^{q-r}\}\,B_{4r+1}=\frac{4q+6}{4}\,\{2^{2q+2}+(-1)^{q}\}.$$

Si l'on passe au cas de $n = 3$ ou $\omega^3 - 1 = 0$, pour lequel il y a à prendre $p = 0$, 1 et 2, et qu'on ait égard à $\sqrt{\omega} = -\omega^2$ et $\sqrt{\omega^2} = \omega$ et à $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, l'équation (1′) se réduit successivement à :

$$2\left(\frac{i}{2}\right)^2 \sum_0^\infty{}_q (-)^q \left\{ + \frac{b_{6q+2}}{(6q+2)!} x^{3q+1} - \frac{b_{6q+4}}{(6q+4)!} x^{3q+2} - \frac{b_{6q+6}}{(6q+6)!} x^{3q+3} \right\} =$$

$$= \cos\frac{\sqrt{x}}{2} \sin\frac{\sqrt{\omega x}}{2} \sin\frac{\sqrt{\omega^2 x}}{2} = -\cos\frac{\sqrt{x}}{2} \sin\frac{\omega^2\sqrt{x}}{2} \sin\frac{\omega\sqrt{x}}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{1 + \cos\sqrt{x} - \cos\omega\sqrt{x} - \cos\omega^2\sqrt{x}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\sum_0^\infty{}_q \frac{2(-x)^{3q+1}}{(6q+2)!} + \sum_0^\infty{}_q \frac{2(-x)^{3q+2}}{(6q+4)!} - \sum_0^\infty{}_q \frac{(-x)^{3q+3}}{(6q+6)!}\right\}.$$

La comparaison du premier et du dernier membre de cette équation nous apprend que les coefficients b ont ici les valeurs très simples

$$b_{6q+2} = 1,$$

$$b_{6q+4} = 1,$$

$$b_{6q+6} = \frac{1}{2},$$

de sorte que la relation récurrente générale (4″) donne successivement, pour $p = 0$, $p = 1$ et $p = 2$:

$$\sum_0{}_r (-)^r \binom{6q+3}{6r} B_{6r-1} = -\frac{6q+3}{3},$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{6q+5}{6r+2} B_{6r+1} = \frac{6q+5}{3},$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{6q+7}{6r+4} B_{6r+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6q+7}{3};$$

à part quelques légères modifications dans la notation, ces trois relations — de forme encore plus simple que celles trouvées ci-dessus pour $n=1$ et $n=2$ — sont les mêmes que j'avais déjà fait connaître pour $n=3$, provisoirement sans démonstration, dans le Compte rendu de la séance du 30 novembre 1878 de la section de physique de l'Académie des sciences d'Amsterdam.

La solution suivant chacune de ces trois relations donne maintenant les trois formules indépendantes suivantes:

$$\prod_{0}^{q}{}_{r}\binom{6r+3}{3}\cdot B_{6q-1}=$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & \binom{3}{0} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{9}{0} & \binom{9}{6} & 0 & \vdots & 0 \\ 5 & \binom{15}{0} & \binom{15}{6} & \binom{15}{12} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2q-1 & \binom{6q-3}{0} & \binom{6q-3}{6} & \binom{6q-3}{12} & \vdots & \binom{6q-3}{6q-6} \\ 2q+1 & \binom{6q+3}{0} & \binom{6q+3}{6} & \binom{6q+3}{12} & \vdots & \binom{6q+3}{6q-6} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & \binom{9}{6} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & \binom{15}{6} & \binom{15}{12} & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{21}{6} & \binom{21}{12} & \binom{21}{18} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q-1 & \binom{6q-3}{6} & \binom{6q-3}{12} & \binom{6q-3}{18} & \vdots & \binom{6q-3}{6q-6} \\ q & \binom{6q+3}{6} & \binom{6q+3}{12} & \binom{6q+3}{18} & \vdots & \binom{6q+3}{6q-6} \end{vmatrix}$$

$$\prod_{0}^{q}{}_{r}\binom{6r+5}{3}\cdot B_{6q+1}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 5 & \binom{5}{2} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 11 & \binom{11}{2} & \binom{11}{8} & 0 & \vdots & 0 \\ 17 & \binom{17}{2} & \binom{17}{8} & \binom{17}{14} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6q-1 & \binom{6q-1}{2} & \binom{6q-1}{8} & \binom{6q-1}{14} & \vdots & \binom{6q-1}{6q-4} \\ 6q+5 & \binom{6q+5}{2} & \binom{6q+5}{8} & \binom{6q+5}{14} & \vdots & \binom{6q+5}{6q-4} \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \prod_{0}^{q}{}_{r} \binom{6r+7}{3} \cdot B_{6q+3} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 7 & \binom{7}{4} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 13 & \binom{13}{4} & \binom{13}{10} & 0 & \vdots & 0 \\ 19 & \binom{19}{4} & \binom{19}{10} & \binom{19}{16} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 6q+1 & \binom{6q+1}{4} & \binom{6q+1}{10} & \binom{6q+1}{16} & \vdots & \binom{6q+1}{6q-2} \\ 6q+7 & \binom{6q+7}{4} & \binom{6q+7}{10} & \binom{6q+7}{16} & \vdots & \binom{6q+7}{6q-2} \end{vmatrix},$$

dont la première a pu subir, en vertu de $\binom{6q+3}{0} - (2q+1) = -2(q)$, une réduction du déterminant de degré $q+1$ au déterminant de degré q, tandis qu'une semblable réduction n'est pas possible, avec conservation d'une forme simple, pour la seconde, ni pour la troisième.

Lorsqu'on prend $n = 4$ ou $\omega^4 - 1 = 0$, de sorte qu'alors $\omega = i$ et qu'il y a à considérer les valeurs $p = 0$, 1, 2 et 3, l'équation générale (1') se transforme en:

$$\cos \frac{\sqrt{x}}{2} \prod_{1}^{3}{}_{k} \sin \frac{\sqrt{i^k x}}{2} = 2 \left(\frac{i}{2}\right)^3 \sum_{0}^{\infty}{}_{q} (-)^q \left\{ + \frac{b_{8q+3}}{(8q+3)!} x^{\frac{8q+3}{2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{b_{8q+5}}{(8q+5)!} x^{\frac{8q+5}{2}} - \frac{b_{8q+7}}{(8q+7)!} x^{\frac{8q+7}{2}} - \frac{b_{8q+9}}{(8q+9)!} x^{\frac{8q+9}{2}} \right\}$$

et (4'') fournit les quatre relations récurrentes suivantes:

$$\sum_0^q {}_r (-)^r \binom{8q+4}{8r} b_{8q-8r+3}\, B_{8r-1} = -\frac{8q+4}{4} b_{8q+3},$$

$$\sum_0^q {}_r (-)^r \binom{8q+6}{8r+2} b_{8q-8r+3}\, B_{8r+1} = \frac{8q+6}{4} b_{8q+5},$$

$$\sum_0^q {}_r (-)^r \binom{8q+8}{8r+4} b_{8q-8r+3}\, B_{8r+3} = \frac{8q+8}{4} b_{8q+7},$$

$$\sum_0^q {}_r (-)^r \binom{8q+10}{8r+6} b_{8q-8r+3}\, B_{8r+5} = \frac{8q+10}{4} b_{8q+9}.$$

En ce qui concerne le calcul des valeurs numériques des coefficients b dans ces relations, on a maintenant, le calcul pour $n=2$ étant déjà exécuté, l'occasion d'appliquer la formule de duplication (12), où, en vertu des valeurs obtenues dans le cas de $n=2$ pour b_{4q+1} et b_{4q+3}, on n'a qu'à substituer $b'_{(2r+1)\frac{n}{2}-1} = b'_{4r+1} = \frac{1}{2^{2r+1}}$ et, que p soit pair ou impair, $b'_{(4q-2r+1)\frac{n}{2}+2p-1} = b'_{8q-4r+2p+1} = \frac{1}{2^{4q-2r+p+1}}$, pour trouver immédiatement

$$b_{8q+2p+3} = \left\{\begin{matrix}(p=0 \text{ jusqu'à } 2)+\\ (p=3) \quad -\end{matrix}\right\} \frac{1}{2^{4q+p}} \sum_0^{\leq 2q+\frac{p}{2}} {}_r (-)^{q-r} \binom{8q+2p+3}{4r+2} \ldots (12 \text{ pour } n=$$

Toutefois, à mesure que q augmente, l'emploi de cette formule suscite, à cause du nombre croissant des termes dans le second membre, des difficultés de plus en plus grandes, et il y a donc lieu de chercher à la transformer de manière à éviter cet inconvénient.

Afin de rendre une semblable transformation, une fois pour toutes, applicable à tous les cas où dans la formule (12), —

ainsi que cela a lieu pour $n = 4$ et, comme on le verra bientôt, aussi pour $n = 6$, — le produit des deux coefficients b' est indépendant de l'indicateur r et peut donc être mis en avant du signe Σ, j'ai, dans le Mémoire original, exécuté cette transformation, pour un n pair quelconque, de telle sorte qu'il en est résulté la formule

$$\frac{n}{2}\sum_{0}^{r \leq 2q+\frac{p}{\frac{1}{2}n}+\frac{n-2}{2n}} (-)^{q-r}\binom{(2q+1)n+2p-1}{(2r+1)\frac{n}{2}} =$$

$$= \sum_{0}^{k \frac{n}{2}-1} \cdot \left(\cos\frac{(4k+1)(2p-1)\pi}{2n}\right)\theta_k^{(2q+1)n+2p-1}, \quad \ldots\ldots (13)$$

où l'on a introduit la notation

$$\theta_k = 2\cos\frac{(4k+1)\pi}{2n}.$$

On a donc $\cos\left(n \operatorname{arc}\cos\frac{\theta_k}{2}\right) = \cos\frac{(4k+1)\pi}{2} = 0$, et par conséquent les valeurs $\theta^2_{k\left(k=0,1,2,\text{etc.},\frac{n}{2}-1\right)}$ ne sont autre chose que les racines de l'équation du degré $\frac{n}{2}$ en θ^2, qu'on obtient en égalant à zéro l'expression connue du cosinus du multiple n (ici pair) d'un arc en fonction des puissances du cosinus de l'arc lui-même ; cette équation (voir aussi la Note à la fin du présent Mémoire) est la suivante :

$$\theta^n + n\sum_{1}^{l \frac{n}{2}} \frac{(-)^l}{l}\binom{n-l-1}{l-1}\theta^{n-2l} = 0. \quad \ldots\ldots (14)$$

Il faut d'ailleurs en général, quand on emploie la formule (13), faire bien attention à la différence entre la limite supérieure $r \leq 2q + \frac{p}{\frac{1}{2}n} + \frac{n-2}{2n}$, posée dans son premier membre, et la limite supérieure $r \leq 2q + \frac{p}{\frac{1}{2}n}$ dont on a réellement besoin dans (12).

Ce qui précède a rapport à une valeur paire quelconque de l'indicateur de période n. Revenant maintenant au cas particulier dont nous avons à traiter, celui de $n = 4$, cas où pour $p = 0$, 1, 2 et 3 les limites supérieures dans (12 pour $n = 4$) et dans le premier membre de (13) sont toujours les mêmes, la substitution de cette dernière formule dans la première a pour résultat:

$$b_{8q+2p+3} = \begin{Bmatrix}(p=0 \text{ jusqu'à } 2)+\\(p=3)\end{Bmatrix} \begin{Bmatrix}1\\-\end{Bmatrix}\frac{1}{2^{4q+p+1}}\left\{\left(\cos\frac{(2p-1)\pi}{8}\right)\theta_0^{8q+2p+3} + \right.$$

$$\left. + \left(\cos\frac{5(2p-1)\pi}{8}\right)\theta_1^{8q+2p+3}\right\},$$

où les carrés de

$$\theta_0 = 2\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{(2+\sqrt{2})}$$

$$\text{et } \theta_1 = 2\cos\frac{5\pi}{8} = -\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$

sont les deux racines de

$$\theta^4 - 4\theta^2 + 2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (14 \text{ pour } n = 4)$$

tandis que dans le second membre les deux cosinus ont, pour $p = 0$, les valeurs $\frac{\theta_0}{2}$ et $\frac{\theta_1}{2}$; pour $p = 1$, $\frac{\theta_0}{2}$ et $\frac{\theta_1}{2}$; pour $p = 2$, $-\frac{\theta_1}{2}$ et $\frac{\theta_0}{2}$; pour $p = 3$, $\frac{\theta_1}{2}$ et $-\frac{\theta_0}{2}$; de sorte que, substituant ces valeurs et observant que $\theta_0\,\theta_1 = -\sqrt{2}$, on aurait, pour le calcul indépendant de b, les quatre formules simples

$$b_{8q+3} = \frac{\theta_0^{8q+4} + \theta_1^{8q+4}}{2^{4q+2}}, \qquad b_{8q+5} = \frac{\theta_0^{8q+6} + \theta_1^{8q+6}}{2^{4q+3}},$$

$$b_{8q+7} = \frac{\left(\theta_0^{8q+6} - \theta_1^{8q+6}\right)\sqrt{2}}{2^{4q+4}}, \quad b_{8q+9} = \frac{\left(\theta_0^{8q+8} - \theta_1^{8q+8}\right)\sqrt{2}}{2^{4q+5}}.$$

Pour la facilité des calculs numériques, on trouvera toutefois que ces formules le cèdent encore aux formules récurrentes suivantes. En introduisant les notations

$$\mu_{2t} = \frac{\theta_0^{4t} + \theta_1^{4t}}{2^{t+1}} \text{ et } \mu_{2t+1} = \frac{\theta_0^{4t+2} + \theta_1^{4t+2}}{2^{t+2}},$$

on trouve d'abord que ces coefficients μ sont liés entre eux par les deux relations récurrentes, à employer alternativement,

$$\mu_{2t} = 4\,\mu_{2t-1} - \mu_{2t-2}$$
$$\text{et } \mu_{2t+1} = 2\,\mu_{2t} \quad - \mu_{2t-1},$$

qui, jointes à $\mu_0 = \frac{\theta_0^0 + \theta_1^0}{2} = 1$ et $\mu_1 = \frac{\theta_0^2 + \theta_1^2}{2^2} = 1$, non seulement nous apprennent que tous ces coefficients sont des nombres entiers, mais nous mettent aussi en état de les écrire immédiatement l'un au moyen de l'autre; tandis que ces coefficients μ déterminent à leur tour les coefficients désirés b, à l'aide des quatre formules.

$$b_{8q+3} = \frac{\mu_{4q+2}}{2^{2q}}, \qquad b_{8q+5} = \frac{\mu_{4q+3}}{2^{2q}},$$

$$b_{8q+7} = \frac{\mu_{4q+4} - 2\mu_{4q+3}}{2^{2q+1}}, \quad b_{8q+9} = \frac{\mu_{4q+5} - \mu_{4q+4}}{2^{2q+1}}.$$

Dans le Mémoire original, on a encore développé, relativement au cas qui nous occupe, les relations suivantes:

$$2\,b_{8q+7} = 2\,b_{8q+5} - \quad b_{8q+3},$$
$$2\,b_{8q+9} = 2\,b_{8q+7} + \quad b_{8q+5},$$
$$2\,b_{8q+11} = 10\,b_{8q+9} - 3\,b_{8q+7},$$
$$6\,b_{8q+13} = 10\,b_{8q+11} + \quad b_{8q+9}$$
$$\text{ou } 2\,b_{8q+13} = 17\,b_{8q+9} - 5\,b_{8q+7};$$

$$16\, b_s = 136\, b_{s-8} - b_{s-16};$$
$$\mu_t = 34\, \mu_{t-4} - \mu_{t-8},$$
$$\mu_t = 6\, \mu_{t-2} - \mu_{t-4};$$

et on a introduit certains coefficients ν, pour lesquels subsistent les relations:

$$\nu_{2t-1} = \mu_{2t} - 2\, \mu_{2t-1} = 2\, \mu_{2t-1} - \mu_{2t-2},$$

$$\nu_{2t} = \mu_{2t+1} - \mu_{2t} = \mu_{2t} - \mu_{2t-1};$$

$$\nu_t = 6\, \nu_{t-2} - \nu_{t-4};$$

$$b_{8q+3} = \frac{2\nu_{4q+2} - \nu_{4q+1}}{2^{2q}},\quad b_{8q+5} = \frac{\nu_{4q+4} - \nu_{4q+3}}{2^{2q}},$$

$$b_{8q+7} = \frac{\nu_{4q+3}}{2^{2q+1}},\qquad b_{8q+9} = \frac{\nu_{4q+4}}{2^{2q+1}}.$$

Dans le cas de $n = 5$ ou $\omega^5 - 1 = 0$, pour lequel entrent en considération les valeurs $p = 0$, 1, 2, 3 et 4, l'équation générale (1′) donne:

$$2\left(\frac{i}{2}\right)^4 \sum_0^\infty {}_q (-)^q \left\{ + \frac{b_{10q+4}}{(10q+4)!} x^{5q+2} - \frac{b_{10q+6}}{(10q+6)!} x^{5q\;3} - \right.$$
$$\left. - \frac{b_{10q+8}}{(10q+8)!} x^{5q+4} - \frac{b_{10q+10}}{(10q+10)!} x^{5q+5} - \frac{b_{10q+12}}{(10q+12)!} x^{5q+6} \right\} =$$
$$= \cos \frac{\sqrt{x}}{2} \prod_1^4 {}_k \sin \frac{\sqrt{\omega^k x}}{2} = \cos \frac{\sqrt{x}}{2} \prod_1^4 {}_k \sin \frac{\omega^k \sqrt{x}}{2},$$

où le dernier membre a pu être ajouté en vertu de l'observation faite ci-dessus, immédiatement avant la formule $(8'_a)$, pour le cas de n impair quelconque; l'équation (4″) fournit alors les cinq relations récurrentes suivantes:

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{10q+5}{10r} b_{10q-10r+4} B_{10r-1} = -\frac{10q+5}{5} b_{10q+4} ,$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{10q+7}{10r+2} b_{10q-10r+4} B_{10r+1} = \frac{10q+7}{5} b_{10q+6} ,$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{10q+9}{10r+4} b_{10q-10r+4} B_{10r+3} = \frac{10q+9}{5} b_{10q+8} ,$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{10q+11}{10r+6} b_{10q-10r+4} B_{10r+5} = \frac{10q+11}{5} b_{10q+10} ,$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{10q+13}{10r+8} b_{10q-10r+4} B_{10r+7} = \frac{10q+13}{5} b_{10q+12} .$$

En ce qui concerne le calcul des coefficients numériques b qui entrent dans ces relations, on trouve, à l'aide de la formule sus-nommée ($8'_a$), puis des formules (9_a), (9_b), (10_a), (10_b), (11_a) et (11_b),

pour $p = 0$, 1, 2 et 4:

$${}_{10q+2p+4} = \left\{ \begin{matrix} (p=0,1)+ \\ (p=2,4)- \end{matrix} \right\} \left\{ 1 + 2^{10q+2p+4} - 5 \sum_0^{<2q+\frac{2p+4}{5}}{}_r \binom{10q+2p+4}{5r} \right\}, \quad \ldots (15_a)$$

et pour $p = 3$:

$$b_{10q+10} = -\frac{1}{4} \left\{ 6 + 2^{10q+10} - 5 \sum_0^{2q+2}{}_r \binom{10q+10}{5r} \right\} \quad \ldots (15_b)$$

Quant à la réduction ultérieure, on obtient d'abord pour n impair quelconque:

$$n \sum_0^{\leqq 2q+1+\frac{2p-1}{n}}{}_r \binom{(2q+1)n+2p-1}{rn} = 2^{(2q+1)n+2p-1} +$$

$$+ \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_k (-)^k \left(2 \cos \frac{k(2p-1)\pi}{n}\right) \left(2 \cos \frac{k\pi}{n}\right)^{(2q+1)n+2p-1}, \quad \ldots (16)$$

où, posant

$$\theta_k = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \left(\text{pour } k = 0, 1, 2, \text{etc.}, \frac{n-3}{2}\right),$$

on a pour k impair: $\quad 2\cos\frac{k\pi}{n} = \theta_{\frac{k-1}{2}}$

et pour k pair: $\quad 2\cos\frac{k\pi}{n} = -\theta_{\frac{n-k-1}{2}}$,

tandis que, en appliquant à l'identité

$$\sin\frac{n+1}{2}\cdot\frac{(2k+1)\pi}{n} - \sin\frac{n-1}{2}\cdot\frac{(2k+1)\pi}{n} = 0$$

l'expression connue du sinus du multiple d'un arc, comme produit du sinus de l'arc lui-même et d'une fonction des puissances de son cosinus (voir aussi la Note à la fin du Mémoire), on trouve l'équation du degré $\frac{n-1}{2}$:

$$\sum_{0}^{\frac{n-1}{4} \text{ ou } \frac{n-3}{4}} (-)^l \binom{\frac{1}{2}(n-1)-l}{l} \theta^{\frac{n-1}{2}-2l} - \sum_{0}^{\frac{n-5}{4} \text{ ou } \frac{n-3}{4}} (-)^l \binom{\frac{1}{2}(n-3)-l}{l} \theta^{\frac{n-3}{2}-2l} = 0, \quad (17)$$

qui a tous ces θ_k pour racines, et où il faut prendre les premières limites supérieures, inégales, ou les secondes, égales, suivant que $\frac{n+1}{2}$ est impair ou pair.

Dans le cas de $n = 5$, on en tire plus particulièrement, en faisant usage de (16) pour la transformation goniométrique de (15_a) et (15_b), les deux formules:

pour $p = 0, 1, 2$ et 4: $b_{10q+2p+4} =$

$$= \begin{Bmatrix}(p=0,\ 1)+\\(p=2,\ 4)-\end{Bmatrix} 1 + \left(2\cos\frac{(2p-1)\pi}{5}\right)\theta_0^{10q+2p+4} - \left(2\cos\frac{2(2p-1)\pi}{5}\right)\theta_1^{10q+2p+4}$$

et, pour $p=3$: $b_{10q+10} = -\frac{1}{4}\left\{6-2\,\theta_0^{10q+10} - 2\,\theta_1^{10q+10}\right\}$,

où
$$\theta_0 = 2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

et
$$\theta_1 = 2\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

sont les deux racines de

$$\theta^2-\theta-1=0, \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (17 \text{ pour } n=5)$$

tandis que dans le second membre de la première de ces formules les deux cosinus doubles ont pour $p=0$ les valeurs θ_0 et $-\theta_1$; pour $p=1$, θ_0 et $-\theta_1$; pour $p=2$, θ_1 et $-\theta_0$; pour $p=4$, θ_1 et $-\theta_0$; de sorte que, tenant compte de $\theta_0\,\theta_1=-1$, introduisant la notation

$$\mu_t = \theta_0^t + \theta_1^t$$

et rétablissant l'ordre naturel de succession de $p=0$ à $p=4$, on trouve pour le calcul des coefficients b les cinq formules:

$b_{10q+4} = 1 + \mu_{10q+5}$, $\quad b_{10q+6} = 1 + \mu_{10q+7}$,

$b_{10q+8} = -1 + \mu_{10q+7}$, $\quad b_{10q+10} = \dfrac{-3+\mu_{10q+10}}{2}$,

$b_{10q+12} = -1 + \mu_{10q+11}$.

Au lieu de déterminer directement ces coefficients μ, chacun pour soi, il est toutefois plus facile de faire usage de la relation récurrente très simple, fondée sur (17 pour $n=5$):

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \mu_{t-2},$$

qui, combinée avec $\mu_0 = \theta_0^0 + \theta_1^0 = 2$ et $\mu_1 = \theta_0 + \theta_1 = 1$, permet d'écrire immédiatement tous les μ successifs, en les dédui-

sant l'un de l'autre. A cette même fin peuvent aussi servir les relations:

$$\mu_t = 3\mu_{t-2} - \mu_{t-4},$$
$$\mu_s = 123\mu_{s-10} - \mu_{s-20};$$

de plus, on a $$b_{10q+8} = b_{10q+6} - 2.$$

Pour $n = 6$ ou $\omega^6 - 1 = 0$, cas où il y a à employer $p = 0$, 1, 2, 3, 4 et 5, l'équation générale (1′) donne:

$$\cos\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\prod_1^5{}_k \sin\frac{\sqrt{\omega^k x}}{2} = 2\left(\frac{i}{2}\right)^5 \sum_0^\infty{}_q (-)^q \Big\{+\frac{b_{12q+5}}{(12q+5)!}x^{\frac{12q+5}{2}} - \frac{b_{12q+7}}{(12q+7)!}x^{\frac{12q+7}{2}} - \frac{b_{12q+9}}{(12q+9)!}x^{\frac{12q+9}{2}} - \frac{b_{12q+11}}{(12q+11)!}x^{\frac{12q+11}{2}} - \frac{b_{12q+13}}{(12q+13)!}x^{\frac{12q+13}{2}} - \frac{b_{12q+15}}{(12q+15)!}x^{\frac{12q+15}{2}}\Big\},$$

tandis que dans (4″) sont impliquées les six relations récurrentes suivantes:

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{12q+6}{12r} b_{12q-12r+5} B_{12r-1} = -\frac{12q+6}{6} b_{12q+5},$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{12q+8}{12r+2} b_{12q-12r+5} B_{12r+1} = \frac{12q+8}{6} b_{12q+7},$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{12q+10}{12r+4} b_{12q-12r+5} B_{12r+3} = \frac{12q+10}{6} b_{12q+9},$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{12q+12}{12r+6} b_{12q-12r+5} B_{12r+5} = \frac{12q+12}{6} b_{12q+11},$$

$$\sum_0^q {}_r (-)^r \binom{12q+14}{12r+8} b_{12q-12r+5} B_{12r+7} = \frac{12q+14}{6} b_{12q+13},$$

$$\sum_0^q {}_r (-)^r \binom{12q+16}{12r+10} b_{12q-12r+5} B_{12r+9} = \frac{12q+16}{6} b_{12q+15}.$$

De même que pour $n=4$, les coefficients b qui entrent dans ces relations peuvent de nouveau être trouvés au moyen de la formule de duplication (12), où il n'y a qu'à substituer, en vertu de ce qui a été reconnu dans le cas de $n=3$, $b'_{6r+2}=1$ et $b'_{12q-6r+2p+2}=b'_{2p+2}$, pour obtenir:

$$b_{12q+2p+5} = \begin{Bmatrix}(p=0 \text{ jusqu'à } 3)\\(p=4 \text{ jusqu'à } 5)-\end{Bmatrix} 6b'_{2p+2} \sum_0^{\leqq 2q+\frac{p}{3}} {}_r (-)^{q-r} \binom{12q+2p+5}{6r+3}, \ldots (12 \text{ pour } n=6)$$

où il faut ensuite, pour $p=0$, 1, 3 et 4, prendre $b'_{2p+2}=1$, et au contraire pour $p=2$ et 5, $b'_{2p+2}=\frac{1}{2}$. En ce qui concerne la réduction goniométrique ultérieure de cette expression, la formule générale (13), appliquée à $n=6$, donne:

$$3\sum_0^{\leqq 2q+\frac{p+1}{3}} {}_r (-)^{q-r} \binom{12q+2p+5}{6r+3} = \left(\cos\frac{(2p-1)\pi}{12}\right)\theta_0^{12q+2p+5} +$$
$$+\left(\cos\frac{5(2p-1)\pi}{12}\right)\theta_1^{12q+2p+5} + \left(\cos\frac{9(2p-1)\pi}{12}\right)\theta_2^{12q+2p+5},$$

où les carrés de

$$\theta_0 = 2\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},$$

$$\theta_1 = 2\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

et

$$\theta_2 = 2\cos\frac{9\pi}{12} = -\sqrt{2}$$

sont les trois racines de

$$\left.\begin{array}{l}\theta^6-6\,\theta^4+9\theta^2-2=0\\ \text{ou }(\theta^4-4\,\theta^2+1)(\theta^2-2)=0,\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (14 \text{ pour } n=6)$$

et où les cosinus figurant comme facteurs dans les trois termes du second membre ont pour valeur:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{pour } p=0: & \frac{\theta_0}{2},\ \frac{\theta_1}{2},\ \frac{\theta_2}{2};\\ \text{pour } p=1: & \frac{\theta_0}{2},\ \frac{\theta_1}{2},\ \frac{\theta_2}{2};\\ \text{pour } p=2: & -\frac{\theta_2}{2},\ \frac{\theta_2}{2},\ -\frac{\theta_2}{2};\end{array}\right\} \begin{array}{ll}\text{pour } p=3: & \frac{\theta_1}{2},\ \frac{\theta_0}{2},\ -\frac{\theta_2}{2};\\ \text{pour } p=4: & -\frac{\theta_1}{2},\ -\frac{\theta_0}{2},\ \frac{\theta_2}{2};\\ \text{pour } p=5: & \frac{\theta_2}{2},\ -\frac{\theta_2}{2},\ \frac{\theta_2}{2}.\end{array}$$

Substituant ces valeurs dans ce second membre, et faisant, là où il est nécessaire, attention à la différence entre la limite supérieure dans le premier membre de la formule en question et celle dans le second membre de (12 pour $n=6$), on trouve successivement, pour $p=0$, 1, 2, 3, 4 et 5, les six formules suivantes, propres au calcul indépendant des coefficients b:

$$b_{12q+5}=\theta_0^{12q+6}+\theta_1^{12q+6}+\theta_2^{12q+6},$$

$$b_{12q+7}=\theta_0^{12q+8}+\theta_1^{12q+8}+\theta_2^{12q+8},$$

$$b_{12q+9}=\frac{-\theta_0^{12q+9}\theta_2+\theta_1^{12q+9}\theta_2-\theta_2^{12q+10}+6\,(-1)^q}{2},$$

$$b_{12q+11}=\theta_0^{12q+11}\theta_1+\theta_1^{12q+11}\theta_0-\theta_2^{12q+12},$$

$$b_{12q+13}=\theta_0^{12q+13}\theta_1+\theta_1^{12q+13}\theta_0-\theta_2^{12q+14},$$

$$b_{12q+15}=\frac{-\theta_0^{12q+15}\theta_2+\theta_1^{12q+15}\theta_2-\theta_2^{12q+16}+6\,(-1)^q}{2}.$$

Parmi les autres relations qui peuvent encore servir dans le présent cas, les principales sont:

$$\mu_t = \frac{\theta_0^{2t} + \theta_1^{2t} + \theta_2^{2t}}{6};$$

$$\frac{\ldots_{q+5}}{\ldots} = \mu_{6q+3}, \qquad \frac{b_{12q+11}}{6} = \mu_{6q+5} - 2^{6q+4},$$

$$\frac{\ldots_{q+7}}{\ldots 6} = \mu_{6q+4}, \qquad \frac{b_{12q+13}}{6} = \mu_{6q+6} - 2^{6q+5},$$

$$\frac{\ldots_{q+9}}{\ldots} = \frac{\mu_{6q+5} - \mu_{6q+4} - 2^{6q+3} + (-1)^q}{2}, \quad \frac{b_{12q+15}}{6} = \frac{\mu_{6q+8} - \mu_{6q+7} - 2^{6q+6} + (-1)^q}{2};$$

$$\mu_t = 6\mu_{t-1} - 9\,\mu_{t-2} + 2\,\mu_{t-3}$$

combinée avec $\mu_0 = \frac{1}{2}$, $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = 3$.

Après avoir effectué les calculs détaillés pour les cas de $n=1$ jusqu'à $n=6$ inclusivement, nous nous abstiendrons, ainsi qu'il a déjà été dit, de faire les calculs analogues pour des valeurs plus élevées de l'indicateur de période n. Si toutefois on considère les résultats obtenus, et qu'on fasse notamment attention à la manière dont, pour $n=4$, $n=5$, $n=6$ les valeurs numériques des racines θ, en fonction desquelles sont exprimés les coefficients b, dépendent de $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, on est porté à se demander si, pour des valeurs plus grandes de n, ces coefficients ne se laisseraient pas aussi exprimer plus ou moins simplement en fonction des formes radicales qui se présentent dans la division correspondante du cercle; si par exemple, pour citer un cas déterminé, la solution de Gauss pour le polygone régulier de 17 côtés ne pourrait donner lieu à trouver aussi une liaison relativement simple entre les nombres de Bernoulli, quand on les distribue par périodes de $n=17$. Quelques tentatives ayant pour objet l'examen de cette question ne m'ont toutefois conduit à aucun résultat.

En terminant, je crois devoir donner un tableau synoptique

$n=$	1	2	3	4			5		6		
				$\mu_0=1$	$\nu_0=0$		$\mu_0=2$		$\mu_0=\frac{1}{2}$		
b_0	$\frac{1}{2}$						$\mu_1=1$				b_0
b_1		$\frac{1}{2}$		$\mu_1=1$	$\nu_1=1$		$\mu_2=3$		$\mu_1=1$		b_1
b_2	$\frac{1}{2^3}$		1				$\mu_3=4$				b_2
b_3		$\frac{1}{2^2}$		$\mu_2=3$	$\nu_2=2$	3	$\mu_4=7$		$\mu_2=3$		b_3
b_4	$\frac{1}{2^5}$		1				$\mu_5=11$	12			b_4
b_5		$\frac{1}{2^3}$		$\mu_3=5$	$\nu_3=7$	5	$\mu_6=18$		$\mu_3=10$	6×10	b_5
b_6	$\frac{1}{2^7}$		$\frac{1}{2}$				$\mu_7=29$	30			b_6
b_7		$\frac{1}{2^4}$		$\mu_4=17$	$\nu_4=12$	$\frac{7}{2}$	$\mu_8=47$		$\mu_4=35$	6×35	b_7
b_8	$\frac{1}{2^9}$		1				$\mu_9=76$	28			b_8
b_9		$\frac{1}{2^5}$		$\mu_5=29$	$\nu_5=41$	6	$\mu_{10}=123$		$\mu_5=126$	6×42	b_9
b_{10}	$\frac{1}{2^{11}}$		1				$\mu_{11}=199$	60			b_{10}
b_{11}		$\frac{1}{2^6}$		$\mu_6=99$	$\nu_6=70$	$\frac{99}{4}$	$\mu_{12}=322$		$\mu_6=461$	6×110	b_{11}

b_{14}	$\frac{1}{2^{15}}$		1				$\mu_{15}=1364$	1365			b_{14}
b_{15}		$\frac{1}{2^{8}}$		$\mu_8=577$	$\nu_8=408$	$\frac{239}{8}$	$\mu_{16}=2207$		$\mu_8=6315$	6×2275	b_{15}
b_{16}	$\frac{1}{2^{17}}$		1				$\mu_{17}=3571$	3572			b_{16}
b_{17}		$\frac{1}{2^{9}}$		$\mu_9=985$	$\nu_9=1393$	51	$\mu_{18}=5778$		$\mu_9=23494$	6×23494	b_{17}
b_{18}	$\frac{1}{2^{19}}$		$\frac{1}{2}$				$\mu_{19}=9349$	3570			b_{18}
b_{19}		$\frac{1}{2^{10}}$		$\mu_{10}=3363$	$\nu_{10}=2378$	$\frac{3363}{16}$	$\mu_{20}=15127$		$\mu_{10}=87533$	6×87533	b_{19}
b_{20}	$\frac{1}{2^{21}}$		1				$\mu_{21}=24476$	7562			b_{20}
b_{21}		$\frac{1}{2^{11}}$		$\mu_{11}=5741$	$\nu_{11}=8119$	$\frac{5741}{16}$	$\mu_{22}=39603$		$\mu_{11}=326382$	6×119168	b_{21}
b_{22}	$\frac{1}{2^{23}}$		1				$\mu_{23}=64079$	24475			b_{22}
b_{23}		$\frac{1}{2^{12}}$		$\mu_{12}=19601$	$\nu_{12}=13860$	$\frac{8119}{32}$	$\mu_{24}=103682$		$\mu_{12}=1217483$	6×325358	b_{23}
b_{24}	$\frac{1}{2^{25}}$		$\frac{1}{2}$				$\mu_{25}=167761$	167762			b_{24}
b_{25}		$\frac{1}{2^{13}}$		$\mu_{13}=33461$	$\nu_{13}=47321$	$\frac{3465}{8}$	$\mu_{26}=271443$		$\mu_{13}=4542526$	6×1215435	b_{25}
b_{26}	$\frac{1}{2^{27}}$		1				$\mu_{27}=439204$	439205			b_{26}
b_{27}		$\frac{1}{2^{14}}$		$\mu_{14}=114243$	$\nu_{14}=80782$	$\frac{114243}{64}$	$\mu_{28}=710647$		$\mu_{14}=16950573$	6×6201975	b_{27}
etc.							etc.				etc.

des valeurs numériques de quelques-uns des premiers coefficients b dans les cas de $n = 1$ jusqu'à $n = 6$ inclusivement, valeurs précédées pour $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ de celles des coefficients μ, et pour $n = 4$ en outre des coefficients ν, en fonction desquels les coefficients b ont été exprimés ci-dessus: ces diverses valeurs s'obtiennent très facilement au moyen des formules récurrentes ou indépendantes que nous avons communiquées; les valeurs de b, telles qu'elles sont données dans le tableau, pourront ensuite servir au calcul par groupes des nombres de Bernoulli. Il faut encore remarquer, au sujet de ce tableau, que la valeur de b ne se déduit pas toujours du μ ou ν placé sur la même ligne, mais quelquefois d'un μ ou ν placé un peu plus haut, et d'autres fois de deux μ ou ν différents: c'est ce qui résulte des formules dont il vient d'être question.

De même que cela a eu lieu dans ce qui précède pour les nombres de Bernoulli, la méthode générale exposée au début pour l'obtention de relations récurrentes périodiques peut aussi être appliquée à d'autres coefficients analogues, et notamment à ceux dits coefficients des tangentes, des cosécantes et des sécantes. A cet égard toutefois nous serons plus concis, et, sans nous astreindre à une application rigoureusement soutenue de la méthode générale, nous développerons seulement, à titre d'exemples, un petit nombre de relations de cette espèce. Conservant la formule employée ci-dessus pour les nombres de Bernoulli, nous prendrons, comme point de départ du calcul, les quatre formules, presque exactement semblables de forme, que voici:

$$-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} = \sum_0^\infty {}_q \frac{B_{2q-1}}{(2q)!} x^{2q-1}, \quad tg\frac{x}{2} = \sum_0^\infty {}_q \frac{T_{2q-1}}{(2q)!} x^{2q-1},$$

$$\text{coséc}\, x = \sum_0^\infty {}_q \frac{C_{2q-1}}{(2q)!} x^{2q-1}, \quad \text{séc}\, x = \sum_0^\infty {}_q \frac{E_{2q}}{(2q)!} x^{2q};$$

dans le même sens où les nombres de Bernoulli, B, qui entrent ici dans le développement non de $cot\, x$ elle-même, mais de $-\frac{1}{2}\,cot\,\frac{x}{2}$, pourraient être appelés coefficients des cotangentes réduits ou amoindris, on peut aussi désigner les coefficients T, pour les distinguer des coefficients des tangentes plus grands qui entrent dans $tg\, x$ elle-même, sous le nom de coefficients des tangentes réduits ou amoindris, tandis que les nombres C représentent les coefficients des cosécantes, et E les coefficients des sécantes, dits aussi nombres d'Euler.

En tenant compte des valeurs de $tg\,\frac{x}{2} = cot\,\frac{x}{2} - 2\,cot\, x$ et de $coséc\, x = cot\,\frac{x}{2} - cot\, x$, dont il a déjà été question à la fin du paragraphe consacré au cas de $n = 1$, on reconnaît que ces nouveaux coefficients T et C sont liés aux nombres de Bernoulli par les formules simples

$$T_{2q-1} = 2(2^{2q} - 1)\, B_{2q-1} \quad \text{et} \quad C_{2q-1} = 2\,(2^{2q-1} - 1)\, B_{2q-1},$$

donc aussi $T_{2q-1} = 2\,(B_{2q-1} + C_{2q-1})$, (qui entre autres pour $q = 0$ et à cause de $B_{-1} = -1$ donnent $T_{-1} = 0$ et $C_{-1} = 1$, de sorte que dans la formule pour $tg\,\frac{x}{2}$ c'est seulement en vue de l'uniformité qu'on a conservé la limite inférieure $q = 0$, au lieu de $q = 1$); chaque relation qu'on trouvera entre les coefficients d'une de ces trois espèces pourra donc aussi, à l'aide de ces substitutions, être regardée comme une relation entre les coefficients de chacune des deux autres espèces. Les nombres eulériens E, au contraire, sont, comme on le sait, plus isolés: du moins ce n'est que par des formules plus complexes, de nature récurrente, qu'ils peuvent être exprimés en nombres de Bernoulli, ou *vice-versâ*. Rappelons encore — ce qui explique aussi en partie pourquoi nous avons précisément choisi les coefficients en question — que T et E sont des nombres entiers

impairs (qu'on trouve déjà indiqués dans L. Euler's *Differenzial-Rechnung*, *übersetzt von* J. A. C. Michelsen, T. 2, 1790, p. 213—214 et 257—262); les coefficients C sont au contraire, de même que les nombres B, des fractions.

Ces divers préliminaires posés, nous nous bornerons à transcrire les relations établies dans le Mémoire original et en partie déjà connues, sans mentionner même les identités goniométriques dont elles ont été respectivement déduites.

Commençons par les coefficients T.

On a pour $n = 1$:

$$\sum_1^q {}_r (-)^{r-1} \binom{2q}{2r} 2^{2r-2} T_{2r-1} = q, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (18)$$

$$\sum_1^{q-1} {}_r (-)^{r-1} \binom{2q}{2r} T_{2r-1} + (-)^{q-1} 2\, T_{2q-1} = 2q, \quad \ldots \ldots (18^*)$$

$$\sum_1^q {}_r (-)^{r-1} \binom{2q+1}{2r} T_{2r-1} = 2q+1, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (18^{**})$$

$$(\text{pour } q \geqq 2) \sum_1^{q-1} {}_r (-)^{r-1} \binom{2q-1}{2r-1} T_{2r-1} + (-)^{q-1} 2\, T_{2q-1} = 1,$$

$$(\text{pour } q \geqq 2) \sum_1^{q-1} {}_r (-)^{r-1} (2r-1) \binom{2q}{2r} T_{2r-1} + (-)^{q-1} 2\, (2q-1)\, T_{2q-1} = 0,$$

$$\sum_1^q {}_r (-)^{r-1} \binom{2q+1}{2r} 2^{2q-2r} T_{2r-1} = (2q+1)(2^{2q-1} - 1).$$

Pour $n = 2$:

$$\sum_0^q {}_r (-)^r \binom{4q}{4r} 2^{2r} T_{4r-1} = -4q$$

$$\text{et } \sum_0^q {}_r (-)^r \binom{4q+2}{4r+2} 2^{2r+1} T_{4r+1} = 4q+2.$$

Pour $n = 3$:

$$\sum_0^{q-1} (-)^r \binom{6q}{6r} T_{6r-1} + (-)^q \frac{4}{3} T_{6q-1} = -2 \,.\, \frac{6q}{3},$$

$$\sum_0^{q-1} (-)^r \binom{6q+2}{6r+2} T_{6r+1} + (-)^q \frac{4}{3} T_{6q+1} = 2 \,.\, \frac{6q+2}{3}$$

$$\text{et} \sum_0^{q-1} (-)^r \binom{6q+4}{6r+4} T_{6r+3} + (-)^q \frac{4}{3} T_{6q+3} = \frac{6q+4}{3}.$$

Pour les coefficients des cosécantes, C, on trouve:

Pour $n = 1$:

$$(\text{pour } q \geqq 1) \sum_0^{q} (-)^r \binom{2q+1}{2r} C_{2r-1} = 0.$$

Pour $n = 2$:

$$\sum_0^{q} (-)^{q-r} \binom{4q+2}{4r} 2^{2q-2r+1} C_{4r-1} = 4q+2$$

$$\text{et} \sum_0^{q} (-)^{q-r} \binom{4q+4}{4r+2} 2^{2q-2r+1} C_{4r+1} = 4q+4.$$

Pour $n = 3$:

$$\sum_0^{q} (-)^r \binom{6q+3}{6r} 2^{6q-6r+3} C_{6r-1} = -\frac{2(6q+3)}{3} \{(-3)^{3q+1} - 1\},$$

$$\sum_0^{q} (-)^r \binom{6q+5}{6r+2} 2^{6q-6r+3} C_{6r+1} = \frac{2(6q+5)}{3} \{(-3)^{3q+2} - 1\}$$

$$\text{et} \sum_0^{q} (-)^r \binom{6q+7}{6r+4} 2^{6q-6r+3} C_{6r+3} = -\frac{2(6q+7)}{3} \{(-3)^{3q+3} - 1\}.$$

Pour les nombres d'Euler, enfin, on a:

Pour $n = 1$:

$$(\text{pour } q \gtreqless 1) \sum_0^q {}_r (-)^r \binom{2q}{2r} E_{2r} = 0,$$

(relation déjà déduite par Euler lui-même, p. 261—262 de l'ouvrage ci-dessus cité: *Differenzial-Rechnung* etc.),

$$\sum_0^q {}_r (-)^r \binom{2q+1}{2r} 2^{2q-2r} E_{2r} = 1,$$

$$\sum_0^{q-1} {}_r (-)^r \binom{2q}{2r} 2^{2q-2r-1} E_{2r} + (-)^q E_{2q} = 1.$$

Pour $n = 2$:

$$\sum_0^q {}_r (-)^{q-r} \binom{4q}{4r} 2^{2q-2r} E_{4r} = 1$$

$$\text{et } \sum_0^q {}_r (-)^{q-r} \binom{4q+2}{4r+2} 2^{2q-2r} E_{4r+2} = 1.$$

Pour $n = 3$:

$$\sum_0^{q-1} {}_r (-)^r \binom{6q}{6r} 2^{6q-6r} E_{6r} + (-)^q \frac{4}{3} E_{6q} = \frac{2}{3} \{(-3)^{3q} + 1\}$$

$$\sum_0^{q-1} {}_r (-)^r \binom{6q+2}{6r+2} 2^{6q-6r} E_{6r+2} + (-)^q \frac{4}{3} E_{6q+2} = -\frac{2}{3} \{(-3)^{3q+1} + 1\}$$

$$\text{et } \sum_0^{q-1} {}_r (-)^r \binom{6q+4}{6r+4} 2^{6q-6r} E_{6r+4} + (-)^q \frac{4}{3} E_{6q+4} = \frac{2}{3} \{(-3)^{3q+2} + 1\}.$$

Vu l'extension que notre travail a déjà prise, nous n'entrerons pas dans une étude spéciale de la fonction $séc\, x + tg\, x$, pour en déduire, ainsi que l'ont fait entre autres Scherk, Stern, Schlömilch, Catalan, dans des écrits qui seront cités à l'instant, des relations par lesquelles les coefficients des sécantes et des tangentes, examinés ci-dessus séparément au moyen de $séc\, x$ et de $tg \frac{x}{2}$, sont en quelque sorte accouplés les uns aux autres.

Au cours des considérations précédentes, nous avons déjà été amené à citer quelques ouvrages ou mémoires ayant rapport aux nombres de Bernoulli et à d'autres nombres analogues. Nous donnerons maintenant encore une liste de différents autres écrits du même genre, liste qui toutefois est fort loin de représenter d'une manière complète la littérature très étendue concernant cette matière; de quelques-unes des pièces qui vont être énumérées je n'ai pas eu l'occasion de prendre connaissance.

L. Euler, in *Novi Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae*, T. 14, pro anno 1759 (doit être 1769), Pars I, pag. 129—167.

De la Place, in *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, *Paris*, Année 1777, pag. 99—122.

L. Euler, *Differenzial-Rechnung*, *übersetzt von* J. A. C. Michelsen, 2er Theil, 1790, pag. 125—158, 211—216, 256—262.

H. A. Rothe, in C. F. Hindenburg's *Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen*, zweyte Sammlung 1800, pag. 306—340.

C. Kramp, *Elémens d'arithmétique universelle*, 1808, pag. 361—362.

S. F. Lacroix, *Calcul différentiel et calcul intégral*, 2e Ed., T. 1, 1810, pag. 254—257; T. 3, 1819, pag. 81—85, 107—116, 126 note, 137, 145—146, 148—151, 443—445, 450, 732.

J. F. W. Herschel, in *Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year* 1816, Part I, pag. 25—45.

Eytelwein, in *Abhandlungen mathem. Klasse der Berliner Akademie*, 1816—1817, pag. 28—41.

J. A. Grunert, *Mathematische Abhandlungen*, 1822, pag. 57—60, 93.

J. A. Eytelwein, *Höhere Analysis*, 1824, I, pag. 488.

H. F. Scherk, *Mathematische Abhandlungen*, 1825.

A. L. Crelle—C. W. Borchardt, *Journal für die Mathematik:* H. F. Scherk, in 4er Bd., 1829, pag. 299—304; G. Libri, in 7er Bd., 1831, pag. 57—67; M. Ohm, in 20er Bd., 1840, pag. 11—12; von Staudt, in 21er Bd., 1840, pag. 372—374; Stern,

in 26er Bd., 1843, pag. 88—91; O. Eisenlohr, in 28er Bd., 1844, pag. 193—212; O. Schlömilch, in 32er Bd., 1846, pag. 360—364; E. E. Kummer, in 41er Bd., 1851, pag. 368—372; G. Bauer, in 57er Bd., 1860, pag. 256—272; G. Bauer, in 58er Bd., 1861, pag. 292—300; Stern, in 79er Bd., 1875, pag. 67—98; Hermite, in 81er Bd., 1876, pag. 93—95; Stern, in id., pag. 290—294; Stern, in 84er Bd., 1878, pag. 267—269; J. C. Adams, (*Table of the values of the first sixty-two numbers of Bernoulli*), in 85er Bd., 1878, pag. 269—272; Stern, in 88er Bd., 1880, pag. 85—95; A. Radicke, in 89er Bd., 1880, pag. 257—261.

Drobisch, *Observationes analyticae*, 1831, pag. 16.

Th. Clausen, in H. C. Schumacher's *Astronomische Nachrichten*, 17er Bd., 1840, pag. 351—352.

J. A. Grunert, *Archiv der Mathematik und Physik:* O. Schlömilch, in 3er Th., 1843, pag. 9—18; O. Schlömilch, in 16er Th., 1851, pag. 411—418.

Von Staudt, *de numeris Bernoullianis*, 1845.

Idem, idem, *commentatio altera*, 1845.

Comptes rendus de l'Académie des sciences, Paris: Binet, in T. 32, 1851, pag. 918—921; F. Thoman, (*logarithmes des 40 premiers nombres de Bernoulli*), in T. 50, 1860, pag. 905—906; Sylvester, in T. 52, 1861, pag. 161—163, 212—214, 307—308; E. Catalan, in T. 54, 1862, pag. 1030—1033, 1059—1062; Le Besgue, in T. 58, 1864, pag. 853—856; E. Catalan, in id., pag. 902—903; Chasles, in id., pag. 903—904; Le Besgue, in id., pag. 937—938; E. Catalan, in id., pag. 1105—1108; E. Catalan, in T. 81, 1875, pag. 441—443; C. le Paige, in id., pag. 966—967; E. Lucas, in T. 83, 1876, pag. 539—541.

B. Tortolini—F. Brioschi, *Annali di Matematica:* A. Genocchi, 1852 (probablement T. 3, pag. 395—405); E. Lucas, in Ser. 2, T. 8, 1877, pag. 56—79.

G. F. Meijer, *Ueber Bernoullische Zahlen. Inauguraldissertation*, 1859.

J. Bertrand, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Calcul différentiel*, 1864, pag. 305—307, 325—326, 346—347, 347—354, 389—390, 421. *Calcul intégral*, 1870, pag. 143—145.

E. Catalan, *Mélanges mathématiques*, 1868, pag. 110—132, 313—334.

E. Catalan, in *Mémoires de l'Académie royale des sciences etc. de Belgique*, T. 37, 1869, pag. 1—19.

J. W. L. Glaisher, in *Proceedings of the London mathematical society*, Vol. 4, 1871—1873, pag. 212—214.

J. C. Adams, in *Proceedings of the Cambridge philosophical society*, Vol. 2, 1872, pag. 269—270.

The Messenger of mathematics: J. W. L. Glaisher, in 2[d] Ser., Vol. 2, (1873?), pag. 190—191; A. Cayley, in 2[d] Ser., Vol. 5, pag. 157—160; E. Lucas, in 2[d] Ser., Vol. 7, pag. 139—141.

J. W. L. Glaisher, (*Tables of the first* 250 *Bernoulli's Numbers* (*to nine figures*) *and their logarithms* (*to ten figures*)), in *Transactions of the Cambridge philosophical society*, Vol. 12, Part. 1, 1873, pag. 384—391.

C. le Paige, in *Annales de la société scientifique de Bruxelles*, T. 1, B, 1875—1876, pag. 43—50.

Nouvelle Correspondance mathématique: E. Lucas et É. Catalan, in T. 2, 1876, pag. 328—338; E. Lucas, in T. 3, 1877, pag. 69—73; Catalan, in T. 4, 1878, pag. 119; E. Lucas et H. Brocard, in T. 5, 1879, pag. 282—285; E. Lucas et Radicke, in T. 6, 1880, pag. 69—72; Hermite, in id., pag. 121—122; A. Radicke, in id., pag. 503—509.

Nouvelles Annales de mathématiques: Worontzoff, in 2[e] Série, T. 15, 1876, pag. 12—19; E. Lucas, in id., pag. 497—499; E. Lucas, in 2[e] Série, T. 16, 1877, pag. 18—26, 157—160.

Bulletins de l'Académie royale des sciences etc. de Belgique: C. le Paige, in 45[e] Année, 2[e] Série, T. 41, 1876, pag. 1017; E. Catalan, in id., pag. 1018—1019.

Dr. L. Schendel, *Die Bernoulli'schen Functionen und das Taylor'sche Theorem*, etc., 1876.

L. Seidel, in *Sitzungsberichte der mathem.-physik. Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München*, Band 7, Jahrg. 1877, pag. 157—187.

J. C. Adams, in *Report* 47[th] *meeting British Association in* 1877, pag. 8—14 (Transactions of the sections).

E. Lucas, in *Bulletin de la société mathématique de France*, T. 6, 1877—1878, pag. 57—68; T. 8, 1879—1880, pag. 169—172.

Gohierre de Longchamps, in *Annales scientifiques de l'école normale supérieure*, 2e Série, T. 8, Année 1879, pag. 55—80.

W. Küttner, in Schlömilch's *Zeitschrift für Mathematik etc.*, 24er Jahrg., 1879, pag. 250—252.

A. Radicke, *Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen*, 1880.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques: E. Catalan, in 2e Série, T. 4, 1880, pag. 77—82; Chr. Zeller, in 2e Série, T. 5, 1881, pag. 195—215.

NOTE.

La formule par laquelle le cosinus du multiple d'un arc est exprimé en fonction des puissances du cosinus de l'arc lui-même, formule que nous avons appliquée ci-dessus au cas de $n=4$, équation (14), a été démontrée de différentes manières; à ce sujet on peut consulter, entre autres:

S. F. Lacroix, *Calcul différentiel et calcul intégral*, 2e Ed., T. 1, 1810, pag. 76—85, 87—93, 263—275; T. 3, 1819, pag. 216—220, 605—611, 616—623.

G. F. W. Baehr, in *Verslagen en meded. der Kon. Akademie van wetenschappen*, afd. Natuurk., Deel 10, 1860, pag. 86—92.

Nouvelles Annales de mathématiques: A. Vachette, in T. 20, 1861, pag. 155—174; Kessler et L. Verharne, in id., pag. 264—266; Mourgue, in 2e Série, T. 12, 1873, pag. 408—417; V. A. le Besgue, in id., pag. 425—431; Desboves, in 2e Série, T. 14, 1875, pag. 385—391.

J. Bertrand, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Calcul différentiel*, 1864, pag. 296—303.

J. A. Serret, *Algèbre supérieure*, 3e Ed., T. 1, 1866, pag. 235—239.

Yvon Villarceau, in *Comptes rendus de l'Académie des sciences, Paris*, T. 82, 1876, pag. 1469—1471.

A. Desboves, *Questions de trigonométrie rectiligne*, 2e Ed., 1877, pag. 91—93.

E. Catalan et Ronkar, in *Nouvelle Correspondance mathématique*, T. 6, 1880, pag. 100—105.

J'ignore s'il se trouve quelque part une démonstration de la nature de celle que je vais donner et par laquelle la formule en question s'obtient en intervertissant, pour ainsi dire, la formule, plus facile à démontrer, qui exprime la puissance du cosinus en fonction des cosinus des multiples.

Pour cette dernière formule, en effet, on a immédiatement, suivant que n est impair ou pair:

$$(2\cos\varphi)^n = (e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})^n = \sum_0^{\frac{n-1}{2}\text{ ou }\frac{n}{2}} {}_r \binom{n}{r} (e^{(n-r)i\varphi}.e^{-ri\varphi}+e^{ri\varphi}.e^{-(n-r)i\varphi}) =$$

$$= 2\sum_0^{\frac{n-1}{2}\text{ ou }\frac{n}{2}} {}_r \binom{n}{r} \cos(n-2r)\varphi,$$

sauf que, dans le cas de n pair, pour des raisons semblables à celles qui ont été observées à propos de la formule (8_b), le dernier terme, déterminé par $r=\frac{n}{2}$, doit être affecté du coefficient numérique $\frac{1}{2}$.

Veut-on maintenant prouver que, réciproquement, on a la formule un peu plus compliquée

$$2\cos n\varphi = (2\cos\varphi)^n + n\sum_1^{\frac{n-1}{2}\text{ ou }\frac{n}{2}} {}_l \frac{(-)^l}{l}\binom{n-l-1}{l-1}(2\cos\varphi)^{n-2l},$$

tout revient à faire voir que si on emploie la précédente non-seulement pour n même, mais aussi pour toutes les valeurs de $n-2l$ dont il y a à tenir compte, et qu'on substitue les résultats dans la dernière formule, ce qui donne, après division par 2,

$$\cos n\varphi = \sum_0^{\frac{n-1}{2}\text{ ou }\frac{n}{2}} {}_r \binom{n}{r} \cos(n-2r)\varphi + n \sum_1^{\frac{n-1}{2}\text{ ou }\frac{n}{2}} {}_l \left\{ \frac{(-)^l}{l} \binom{n-l-1}{l-1} \sum_0^{\frac{n-2l-1}{2}\text{ ou }\frac{n-2l}{2}} {}_r \binom{n-2l}{r} \cos(n-2l-2r)$$

cette nouvelle expression n'est qu'une identité. A cet effet, déterminons le coefficient d'un terme quelconque $\cos(n-2r)\varphi$ dans le développement du second membre: il suffit pour cela de remplacer dans la seconde partie de ce membre la notation r de l'indicateur variable par $r-l$, à condition d'observer que la limite primitivement indiquée $r \gtrless 0$ devenant alors $r-l \gtrless 0$, la limite $l \leqq \frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n}{2}$ de la première sommation dans cette seconde partie doit aussi être réduite à $l \leqq r$. De cette manière, on trouve donc pour le coefficient complet de $\cos(n-2r)\varphi$ la valeur:

$$\binom{n}{r} + n \sum_1^r {}_l \frac{(-)^l}{l} \binom{n-l-1}{l-1} \binom{n-2l}{r-l} =$$

$$= \frac{n}{r} \left\{ \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \sum_1^r {}_l (-)^l \frac{r!}{(r-1)!} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{(n-l-1)!}{(l-1)!(n-2l)!} \cdot \frac{(n-2l)!}{(r-l)!(n-r-l)!} \right\} =$$

$$= \frac{n}{r} \left\{ \binom{n-1}{r-1} + \sum_1^r {}_l (-)^l \binom{r}{l} \binom{n-l-1}{r-1} \right\} = \frac{n}{r} \sum_0^r {}_l (-)^l \binom{r}{l} \binom{n-l-1}{r-1},$$

valeur égale, en vertu d'une des formules fondamentales de la théorie des séries, à $\frac{n}{r}$ fois le premier terme de la série des différences de l'ordre r qu'on obtient en retranchant itérativement, dans la série des coefficients binomiaux $\binom{n-1}{r-1}$, $\binom{n-2}{r-1}$, $\binom{n-3}{r-1}$, etc., $\binom{n-r-1}{r-1}$, chaque terme du précédent; ou encore, en vertu de $\Delta\binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{r-1} - \binom{n-2}{r-1} = \binom{n-2}{r-2}$, égale à $\frac{n}{r}\Delta^r \binom{n-1}{r-1} = \frac{n}{r}\Delta^{r-1}\binom{n-2}{r-2} = \frac{n}{r}\Delta^{r-2}\binom{n-3}{r-3} =$ $=$ etc. $= \frac{n}{r}\Delta\binom{n-r}{0} = \frac{n}{r}\Delta 1 = 0$. Dans le développement du

second membre de l'identité qu'il s'agit de démontrer, tous les termes disparaissent donc réellement, y compris même le dernier, déterminé par $r = \frac{n}{2}$, dans le cas de n pair, attendu que le coefficient de ce terme doit être divisé par 2 tant dans la première que dans la seconde partie du second membre; il n'y a d'exception, comme cela doit être, que pour le premier terme, déterminé par $r = 0$, à savoir $\cos n\varphi$: la seconde partie du second membre ne pouvant pas contribuer à ce terme, à cause de $l \geqq 1$, il prend pour coefficient $\binom{n}{0}$, c'est-à-dire, l'unité.

Ce qui précède est plutôt une vérification de la formule pour $2 \cos n\varphi$, qu'une déduction directe de cette formule au moyen de celle pour $(2 \cos \varphi)^n$. Néanmoins, on pourrait sans beaucoup de peine, en écrivant le développement de $2 \cos n\varphi$ suivant les puissances descendantes de $2 \cos \varphi$ avec des coefficients indéterminés, faire subir à l'opération une modification telle que les valeurs de ces coefficients se déduiraient successivement l'une de l'autre.

D'une manière analogue, ou aussi en différentiant par rapport à φ la formule trouvée pour $2 \cos n\varphi$, on peut obtenir la formule

$$\sin n\varphi = \sin \varphi \sum_{0}^{\frac{n-1}{2} \text{ ou } \frac{n-2}{2}} (-)^l \binom{n-l-1}{l} (2 \cos \varphi)^{n-2l-1},$$

dont il a été question précédemment, à propos de l'équation (17). Et réciproquement, si on avait débuté par cette dernière formule, on pourrait au moyen d'elle retrouver la formule pour $2 \cos n\varphi$, non-seulement par la différentiation, mais aussi, soit par $2 \cos n\varphi = \frac{\sin (n+1)\varphi}{\sin \varphi} - \frac{\sin (n-1)\varphi}{\sin \varphi}$, en observant que $\binom{n-l}{l} + \binom{n-l-1}{l-1} = \frac{n}{l}\binom{n-l-1}{l-1}$, soit par $2 \cos n\varphi = \frac{\sin (n+2)\varphi}{\sin \varphi \,.\, 2\cos \varphi} - \frac{\sin (n-2)\varphi}{\sin \varphi \,.\, 2\cos \varphi}$, en observant que $\binom{n-l+1}{l} - \binom{n-l-1}{l-2} = \frac{n}{l}\binom{n-l-1}{l-1}$.

Delft, juillet 1881.

NOTE SUR LE

RÔLE DE NOS INGÉNIEURS HOLLANDAIS DANS L'EMPLOI DES LIGNES DE NIVEAU,

PAR

D. BIERENS DE HAAN.

---

1. Longtemps on a été en suspens pour décider à qui l'on devrait les lignes de niveau, ou d'égale hauteur, qui sont d'un usage si multiplié dans la configuration du terrain. En 1839, M. W. Wolkenhauer, dans un Mémoire intitulé „*Zur Geschichte der Tiefenmessungen*" (*Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik*, Bd. I, S. 589—598), a mentionné comme l'inventeur de ces lignes l'ingénieur français Philippe Buache (né le 7 février 1700, à Paris, où il mourut le 27 janvier 1773; Géographe du Roi et membre de l'Académie des Sciences de Paris).

Celui-ci avait fait une carte du canal de la Manche, sur laquelle il avait marqué les profondeurs égales de la mer, depuis 10 jusqu'à 20 brasses, afin de montrer la liaison entre les montagnes de la France et celles de l'Angleterre. Quinze ans après, cette carte fut gravée à la suite d'un „*Essai de Geographie Physique*, *Où l'on propose des vûes générales sur l'espèce de Charpente du Globe, composée des chaînes de montagnes qui traversent les mers comme les terres; avec quelques*

considérations particulières sur les différens bassins de la mer. & sur sa configuration intérieure", Essai publié dans les „Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences", Année 1752, page 399—416. La carte y figure comme Pl. XXV, sous le titre de „*CARTE PHYSIQUE et PROFIL du CANAL de la MANCHE* et d'une partie *de la MER du NORD, où se voit l'état actuel des profondeurs de la MER, Avec les* Terreins *de FRANCE et d'ANGLETERRE, dont les Eaux s'ecoulent directement dans ces MERS, depuis les différentes* chaines de Montagnes, *Dressée en* 1752. *Par* Philippe Buaché". En bas, à gauche, on lit: „Avertissement. *L'Auteur presenta en* 1737 *à l'Acad^e. des Sc. ce Plan Physique de la* Manche, *en manuscrit, et celui de l'*Ocean *vers l'Equateur, pour montrer comment se font les jonctions des* Terres, *soit prochaines, soit éloignées*". Dans le texte (p. 415), Buache ajoute: „L'usage „que j'ai fait des Sondes, et que personne n'avoit employé „avant moi pour exprimer les fonds de la mer, me paroît très- „propre à faire connoître d'une manière sensible les pentes ou „talus des côtés, & en même-temps les espèces de lits que „cette méthode me donne, & qui nous conduisent par degrés „jusqu'aux fonds des bassins de la mer".

Buache revient sur sa méthode dans un Mémoire faisant partie du tome suivant des Mémoires de Paris, Année 1753, p. 586—588, „*PARALLÈLE DES FLEUVES DES QUATRE PARTIES DU MONDE, Pour servir à déterminer les hauteurs des montagnes du Globe physique de la Terre, qui s'exécute en relief au dôme du Luxembourg*". Il était occupé, en effet, à construire un globe de dix pieds de diamètre, où les montagnes étaient représentées en relief et le fond des mers en creux. A ce propos, il parle de l'usage de ses lignes. „De cette façon, au lieu de „supposer l'abaissement des eaux pour découvrir la terrein [sic] „qui foit la liaison d'Angleterre avec la France, je ferai le con- „traire sur le globe physique; car en supposant les élévations „des eaux au dessus du niveau réel de la mer, on apercevra „les terres qui se couvriroient par l'augmentation successive du „volume des eaux."

Plus tard, l'ingénieur français Ducarla exposa cette méthode dans un Mémoire adressé, en 1771, à l'Académie des sciences; toutefois, ce fut seulement à la suite d'une nouvelle édition de ce travail, donnée en 1782 par Dupain-Triel, qu'elle attira l'attention. En 1771 on fit une première application de la méthode, mais encore en 1804, dans une nouvelle édition, Dupain-Treil semblait n'avoir que peu d'espoir de la voir adopter. Généralement, c'est Ducarla qui est regardé comme l'inventeur, surtout parce que Buache lui-même, à ce qu'on prétend, aurait reconnu la priorité des idées de Ducarla. Mais, à ce moment, Buache était âgé, et il me paraît qu'on doit attacher plus d'importance à ses premières allégations, ci-dessus citées, qu'à son désistement postérieur.

2. M. J. L. Líčka, professeur de géodésie à Prague, ne partage pas l'opinion de M. Wolkenhauer, et dans le „*Zeitschrift für Vermessungswesen von* Dr. W. Jordan, 1880, S. 37—50. il a revendiqué les droits de priorité pour Cruquius et Bolstra, tous les deux ingénieurs hollandais, en se fondant sur une carte de la Merwede, publiée par eux et citée par M. Bardin et M. Augoyat. Toutefois, M. Líčka n'avait vu que la copie de cette carte, et celle-ci n'apprenait pas si la méthode était due à Nicolas Samuel Cruquius (né le 2 décembre 1678 à Delft, mort le 5 février 1754 à Spaarndam), ou bien à Melchior Bolstra (né en 1704, mort en novembre 1776 à Leyde).

J'espérais pouvoir décider cette question à l'aide de la riche et précieuse collection de cartes rassemblée par feu M. Bodel-Nyenhuis et qui fait aujourd'hui partie de la bibliothèque de Leyde. Comme on va le voir, cette attente n'a pas été trompée.

3. Parlons d'abord de la carte citée par M. Líčke. Elle est composée d'une seule feuille, qui porte le titre:

„*KAART van een gedeelte der RIVIER de MERWEDE van deszelfs begin* (*als de Samenkomst van WAAL en MAAS*) *tot beneden HARDINKSVELD, met de OUDE WIEL en KILLEN*".

Elle va à l'ouest de 51°48′6″ à 51°52′6″ et à l'est de 51°45′6″ à 51°49′12″ Lat. N.; au nord, de 21°1′48″ à 21°11′18″ et au

sud de 20°58'24" à 21°7'54"; elle a une longueur de 59 cm. et une largeur de 42 cm.; de sorte qu'elle n'est pas dirigée exactement vers le Nord.

A gauche en haut, sous le cadre, on lit: „*de Dieptens op deeze Kaart uitgedrukt zyn gereduceert op een ordin. Laag water, ofte* 158 *duim beneeden het Hardinksvelder Toren peyl, en de Vloeden* 20 *duim daar booven*"; tandis qu'à droite, en bas, il y a: „*deeze gekopieert uit de Kaart van de Merwede door N. Cruquius*, 1729. *en op Eene coers en maat gebragt als de Kaart van de Maas en Merwede, beginnende van de Noord Zee tot Hardinksveld. Door M. Bolstra.*" Au dessous: „*Maat van Een duizent Rhynlandsche Roeden*".

Sur cette carte sont données les courbes d'égale profondeur de la Meuse, de la Merwede, du Waal et des Killen, figurées par des lignes ponctuées, lorsqu'elles sont de cote impaire, soit 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 25, 35, 45, et par des lignes pleines quand elles sont de cote paire, soit 2, 4, 6, 8, 10, 12, 18, 20, 30, 40, 50. En outre, on y trouve les dégâts des „inundatien van 1658, 1709, 1726, 1728, 1729", le „*Nieuwe Overlaat dyk gemaakt* 1738", en continuation du „*Nieuwe Wolferse Dyk ofte Inlaag* 1593, 1594 en 1595" derrière Hardinksveld, enfin la „*Project Overlaat door 't Land van Altena*".

4. Des recherches minutieuses ont fait voir que cette carte est une reproduction fidèle, mais à une échelle réduite, d'une autre carte en deux feuilles, dont l'une a pour titre „*de Rivier* de *MERWEDE*, van (*ontrent*) [sic] *de* Steenen hoek. *Oostwaards op*, tot *verby het Dorp van* Sleeuwijk *met den* Ouden Wiel *en de* Killen, *die uit de selve na den* Bies-Bos *afloopen. etc.*"; et l'autre: „*de Rivier* de *MERWEDE*, van *even boven het Dorp* Sleeuwijk. *Oostwaards op*, *verby* Gorichem, *en de Mond van de LINGE*, *tot aan desselfs beginsel*, *namentlijk de Rivieren de WAAL en MASE*, *by* Woudrichem *en* Loevesteyn, *etc.*"

Ces cartes sont orientées exactement vers le Nord, et contiennent de 51°47'33" à 51°50'27" „*Latitudo*" et de 20°55'55" à 21°1'35", puis à 21°7'5", „*Longitudo*".

L'échelle fait voir que pour cette carte elle est précisément le double de celle de la carte précédente; or on y lit „*de Tien Duysend Roeden van dese Kaarten maken Een Rhynlandse Roede*" de sorte qu'ici le rapport est de 1 : 10000, et dans la carte précédente de 1 : 20000. On y lit encore, près des cotes des lignes d'égale profondeur: „A° 1729 *in July voeten diep beneden 't lage Water*"; d'où il suit que, ici comme là, les profondeurs sont données en pieds.

Nulle part on ne trouve sur cette carte le nom de l'auteur, mais sa ressemblance absolue avec la carte précédente force à conclure que c'est bien la carte dont il y était question: ainsi les deux *overlaat* n'y sont figurés qu'en lignes pointillées. On est amené à la même conclusion par une reproduction à échelle amoindrie, qui se trouve comme carton sur une grande carte de Bolstra, dont nous aurons à parler plus loin.

5. Mais, outre toutes ces preuves indirectes, je suis parvenu à en découvrir une directe, tout à fait concluante.

Par résolution du 10 mai 1729, les Etats de la Hollande et de la Frise Occidentale avaient nommé une commission chargée d'inspecter la rivière la Merwede depuis Gorichem jusqu'à la mer. Cette commission, composée de 's Gravesande et Wittichius, professeurs de philosophie et de mathématiques à l'université de Leyde, et de Cruquius, arpenteur, fit connaître le résultat de ses travaux dans un rapport, suivi d'annexes, qui fut publié, à la date du 12 juillet 1730, sous le titre de: „Rapport van de Professoren 's Gravesande en Wittichius en van de Landmeeter Cruquius, wegens haare gedaane inspectie van de Rivier de Merwede van Gornichem af benederwaarts, en wegens de voorgeslaage middelen tot voorkooming van inundatien"; 33 pages in-folio, avec 3 cartes.

De ces trois cartes, qui naturellement ont été dessinées par Cruquius, et dont chacune a 62 cm. de largeur et 52 cm. de hauteur, les deux premières ne sont autres que celles que nous venons de décrire. La troisième, que l'on rencontre aussi dans la collection Bodel-Nyenhuis, est assez intéressante pour mériter d'être décrite à son tour.

Elle est divisée en bandes, dont la supérieure a pour titre „N°. 3. *Caarte ofte Afteeckening Van de RIVIER DE MERWEDE Van GORICHEM af benedenwaarts etc*", et est à l'échelle de 1 : 50.000; on n'y trouve point les lignes de niveau égal. La deuxième contient „N°. 2. *Doorsnydingen van* DE RIVIER *omtrent den ouden Wiel*"; ses six sections sont à l'échelle de 1 : 2000. Puis une troisième bande, sur 495 mm. de la largeur. „N°. 5. *Hoogte van den Dyk benoorden de MERWEDE; ten aanzien van 't Waterpas, van de Rivier, en van 't Polder-Land, daar benoorden: tusschen 't Dordrechtse (of Papendrechtse) en 't Loevesteynse Veer.*" L'Echelle est de 1 : 10000, mais les distances verticales sont 500 fois plus grandes. „*Dit Profil dan aanmerckende* 500 *maal langer uitgetroeken te zyn, vertoont zig alles in de ware Proportie.*"

A gauche de la troisième bande, et comme bande inférieure dans toute la largeur, on trouve encore deux cartons. Le premier donne le „WATER-BEWEGING, *aan 't Hoofd te Hardinks Veldt Waargenomen*" et le „*SNELHEIT van STROOM*" suivant la méthode graphique, encore actuellement usitée, où les abscisses représentent le temps, les ordonnées le flux, le reflux et la vitesse.

Le second carton a pour titre „*de Daaglykse Hoogte van 't HOOGSTE en 't LAAGSTE WATER in de RIVIER, op de Aangeteekende Maanden en Dagen, aan 't Hoofd te Hardinks Veld in 't Jaar* 1729—1730 *vsor 't meerendeel Waargenomen, en de overige tot het Water van Hardinks Veld gereduceert, Waar door met behulp van 't Bovenstaande op yder Oogenblik, de Hoogte van 't Water, in Relatie van Dyk en Landen, op alle de Plaatsen langs de bovenstaande Rivieren by-na kon werden gevonden.*"

Ici les jours, de 1. Junius 1729 à 31. Martius 1730, sont pris comme abscisses, et les „*Rhynlandsche Voeten beneden 't Hardinks Veldse Tooren Peyl*", de 5 à 15, comme ordonnées, suivant la méthode graphique susdite.

5. Occupons-nous maintenant de la grande carte de Bolstra, mentionnée ci-dessus, aux n°s 2 et 4.

Elle consiste en cinq feuilles de 71 centim. de hauteur, dont les deux premières ont une largeur de 585 millim., les deux

suivantes de 50 centim. et la dernière de 70 centim. La première contient, depuis le bord inférieur du cadre jusqu'à un carton, de 51°56'53″ à 52°2'0″ Lat.; la dernière, depuis un carton jusqu'au bord supérieur du cadre, de 51°44'10″ à 51°49'24″. Le bord supérieur du cadre va, pour l'ensemble des cinq feuilles de 20°15'24″ à 21°2'30″ Long., le bord inférieur, de 20°11'0″ à 20°58'12″, de sorte que cette carte n'est pas orientée exactement du sud au nord.

Quelquefois les cartons supérieurs de la première feuille, les cartons supérieurs de la deuxième feuille et les cartons inférieurs de la cinquième feuille se trouvent réunis sur une sixième feuille: c'est ce qui est le cas pour l'exemplaire de la collection Bodel-Nyenhuis, que nous allons décrire.

La première feuille, qui sous cette forme n'est haute que de 53 centim. (tout comme la deuxième), porte encore en haut, l'un à côté de l'autre, deux petits cartons, dont le premier a pour titre „*Profil der Doorsnyding uyt de Pan tot in de Noord Zee*"; ce profil est désigné sur la carte comme „Concept-Doorgraving van N. Cruquius", et visait la coupure du „Hoek van Holland". Le second carton a pour titre „*Het Product der Peylingen op de Hoek van Holland binnen in de Pan, en daar buyten in de Noord Zee volgens Waarneminge in de Maand September* A°. 1738", d'après la méthode graphique. Contre la marge inférieure est figurée une pierre, qui sur la face d'en haut porte l'échelle (de 1 : 20000) et sur la face antérieure le titre: „*de Ordinaire Ebbe in de Noord Zee voor de Mond van de Maas, valle lager dan de Dieptens die op deese Kaart staan uytgedrukt Vier en twintig Rynlandse duymen, en de Vloeden dertig duym daar en boven; allen volgens waarneminge gehouden sedert Nov.* 1738, *tot Nov.* 1739, *door M. Bolstra.*"

Sur la deuxième feuille on voit, en haut à gauche, deux cartons l'un au-dessous de l'autre. Le carton supérieur s'appelle: „*Vergelyking van de Maas aan het Brielse Hoofd, met de Noord Zee, tot Katwijk;* l'inférieur „*de Hoog Water van de* MAAS *aan het* BRIELSE HOOFD."

La quatrième feuille a en bas un carton de toute la longueur de la feuille, avec le titre „*Vergelijking van de Maas aan het Brielse hoofd, met de Merwe te Dordrecht aan de Rietdijkse haven, van Novemb*r. 1739 *tot Nov.* 1741."

La cinquième feuille a en bas à droite deux cartons, dont le supérieur donne „*Gemiddelde maandelykse waarnemingen, van de Rivier de Merwede in duimen; boven het Amsterdamse Peyl*"; à côté, on lit: „*BERIGT, de Ordinaire Vloeden en Ebben aan de Kop komen na-genoeg over een met die te Dordrecht. het Peyl daar deese Gronden na zyn in kaart gebragt is te Dordrecht, en aan de Kop., op 't Amsterdamse Peyl; dat verhogende tot Hardinksveld op* 40 *duim daar booven; ofte* 146 *duim beneeden 't Toren-peyl, aldaar; zijnde na-genoeg gelyk met de Ordin. Ebben en de Vloeden* 16 *duim daar booven — te zien in deez' nevensgaande Tafel, meeting, peyling, karteering enz. by my M. Bolstra.*"

Le carton inférieur est le „*Afbeelding in Figuur, van de Vloeden en Ebben der Merwede, van Verscheide maanden; zo te Dordrecht als tot Hardinksveld.*" Ces deux cartons vont, l'un et l'autre, d'Août 1739 à Juin 1741.

Tous ces cartons sont construits d'après la méthode graphique.

Sur la carte on retrouve nos courbes de niveau, traitées de la même manière que sur les cartes des Nos 3 et 4.

Il nous reste encore à parler de la feuille qui réunit des cartons appartenant aux cinq feuilles précédentes.

Le premier de ces cartons, qui se rapporte à la première feuille de la carte, contient d'abord le titre „KAART VAN DE BENEEDEN RIVIER DE MAAS EN DE MERWEDE VAN DE NOORDZEE TOT HARDINKSVELD" et puis le „*Tyd van 't Hooge (en 't Laage) water met Nieuwe ofte Volle maan op de Bovenstaande Plaatsen in Uuren en minuten.*"

Le deuxième carton donne les „*Gemiddelde Vloeden (en Ebben)*" pour la deuxième feuille. Ces deux cartons sont construits selon la méthode graphique.

Le troisième carton, „*de Vijf Blaaden van de Maas en Mer-*

wede in een Generaale Kaart door M. Bolstra", a une échelle de 1 : 80.000. On y trouve un carton plus petit „*de Twee Blaaden van de Rivier de Merwede door N. Cruquius dus gecopieert en Verklijnt door M. Bolstra*", à l'échelle de 1 : 80.000. Sur ces deux cartons figurent de nouveau les courbes d'égal niveau.

Si l'on ajoute ce petit carton au grand, on justifie le titre général „KAART VAN DE BENEEDEN RIVIER DE MAAS EN DE MERWEDE VAN DE NOORD-ZEE TOT GORINCHEM."

Une copie de ce carton est jointe à la présente Note.

On en trouve aussi une copie dans l'ouvrage d'Isaac Tirion; „Hedendaagsche historie of Tegenwoordige staat van alle volkeren;" XVIIe Deel, Amsterdam 1749, 8°, bladz. 348; mais ici les lignes de niveau sont omises, ce qui pourrait induire en erreur dans la question qui nous occupe.

7. Quoique la méthode des courbes de niveau soit assez simple pour qu'on puisse la supposer connue avant 1726, des recherches minutieuses ne m'en ont fait découvrir aucune trace antérieurement à cette date. Mais, comme Cruquius avait proposé, dès l'année 1725, de faire une carte hydrographique de la Hollande, il devait, me semble-t-il, attacher beaucoup d'importance à la connaissance des hauteurs du lit de nos rivières, et le meilleur moyen de s'en faire une idée exacte était, naturellement, l'emploi de nos courbes de niveau.

SUR LA

DENSITÉ ET LE COEFFICIENT DE DILATATION DE LA DIÉTHYLAMINE

PAR

A. C. OUDEMANS Jr.

Le travail dont les résultats vont être communiqués doit son origine à un Mémoire de M. J. D. van der Waals: „*Over de coëfficienten van uitzetting en van zamentrekking in overeenstemmende toestanden van verschillende vloeistoffen*", inséré dans les *Natuurkundige Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, tome XX (1880).

L'auteur y donne, comme résultat de certaines considérations théoriques, une règle suivant laquelle, au moyen de la température critique et du coefficient de dilatation d'une substance, on peut calculer le coefficient de dilatation d'une autre substance, dont la température critique est également connue, et à la fin de son Mémoire il arrive à une autre règle, d'après laquelle la densité d'une substance, dont on connaît la température critique et la pression critique, le coefficient de dilatation et le poids moléculaire, peut être déduite approximativement de celle d'une autre substance, pour laquelle ces dernières données sont également connues et dont on possède en outre la densité.

C'est ainsi que l'auteur indique expressément que la densité de la diéthylamine, à une température correspondant à 0° pour l'éther, sera à peu près égale à celle de l'éther. Par températures *correspondantes* on entend celles qui sont des parties égales de la température critique absolue.

Or, comme on ne sait rien avec certitude de la densité et du coefficient de dilatation de la diéthylamine, j'ai pensé qu'il y aurait de l'intérêt à faire quelques recherches à ce sujet, afin de fournir un contrôle expérimental à la règle donnée à priori par M. van der Waals.

La matière qui a servi à ces recherches provenait de la fabrique bien connue de C. A. F. Kahlbaum, à Berlin, et elle avait été préparée au moyen de la nitroso-diéthyline, ce qui garantissait suffisamment qu'elle était pure de tout mélange d'éthylamine et de triéthylamine.

Environ 70 cc de cette préparation furent soumis à la distillation fractionnée. Le liquide commença à bouillir, sous une pression barométrique de 762mm, à la température (corrigée) de 55°,3. Pendant un temps assez long, le thermomètre ne s'éleva que d'une manière à peine appréciable. Lorsque 40 cc eurent distillé, il marquait 57° C dans la vapeur du liquide; ensuite, la température monta plus rapidement jusqu'à 61° C et au-delà. Finalement, il resta dans la cornue, à 70° C, une petite quantité (à peine 1 cc) d'un liquide que l'eau rendait trouble, et qui consistait très probablement en un mélange de nitroso-diéthyline, de diéthylamine et d'eau. Il exhalait distinctement l'odeur des deux premières de ces matières, et un fragment de potasse finissait par y tomber en déliquescence.

Par des distillations fractionnées du liquide passé entre 55°,3 et 61° C, j'obtins un produit qui bouillait entre 55°,3 et 57° C et qui, d'après les résultats d'un examen de sa composition et de sa capacité de saturation, se rapportait à la formule $C_4 H_{11} N$. Dans l'idée que ce produit était réellement de la diéthylamine sensiblement pure (d'autant plus que le point d'ébullition de celle-ci est placé par M. Hofmann à 57° C), je fis deux séries

de déterminations de densités, la première de 0°—40° C, à l'aide d'un excellent pycnomètre de Geissler pourvu d'un réservoir de dilatation et, comme bouchon, d'un thermomètre divisé en cinquièmes de degré; la seconde de 0°—54° C, à l'aide d'un flacon de Gay-Lussac, d'environ 10 cc de capacité. En opérant avec ce dernier petit instrument, je pus jusqu'à 41° C faire usage d'un thermomètre de Geissler divisé en cinquièmes de degré; mais, celui-ci n'indiquant pas de températures supérieures, je fus dans l'origine obligé, pour les températures de 41° — 54°, d'avoir recours à un autre thermomètre, dont la marche à la vérité m'était exactement connue, mais où chaque degré n'occupait que 1½ millimètre et où les fractions devaient être estimées. Les déterminations faites, dans cette seconde série, au-dessus de 40° C, et qui pour d'autres raisons encore méritent moins de confiance, peuvent, je crois, être hardiment écartées.

La capacité des deux instruments fut déterminée, avec tous les soins nécessaires, au moyen de la pesée de l'eau qu'ils pouvaient contenir.

Pour la capacité, exprimée en centim. cubes, du pycnomètre de Geissler, je trouvai entre 0°—40° C la valeur

$$V^t = 22,8488 + (0,0005)t,$$

comme résultat de 25 pesées, dont 5 exécutées à 0°, 5 vers 20°, 5 vers 40° C, et le reste à des températures intermédiaires. (La plus grande différence entre les volumes observés et calculés s'élevait à ± 0,0023 cc, la différence moyenne à ± 0,0015 cc).

La capacité en centimètres cubes du flacon de Gay-Lussac, déduite d'une vingtaine d'observations entre 0° et 55° C, pouvait être représentée par la formule:

$$V^t = 9,9470 + 0,000233\ t.$$

(La plus grande différence entre les volumes observés et calculés s'élevait ici à ± 0,0021 cc, la différence moyenne à ± 0,0012 cc).

Les résultats des deux premières séries de déterminations de la densité de la diéthylamine, résultats dont je donnerai le détail plus loin, concordaient très bien entre eux de 0° à 40°. Néanmoins, pour mes recherches ultérieures, j'ai renoncé à l'emploi du pycnomètre, d'abord parce qu'il ne me permettait pas d'atteindre des températures supérieures à 40° C, et en second lieu parce que je jugeai qu'un pycnomètre à bouchon rodé convenait moins pour des liquides aussi volatils que la diéthylamine, l'éther, etc., à cause de l'ascension capillaire du liquide entre le bouchon et le col, et de l'évaporation qui en est la suite. Dans les déterminations postérieures je me suis donc borné à l'emploi du flacon de Gay-Lussac, ci-dessus décrit.

Lorsque les deux premières séries de recherches furent terminées, je voulus m'assurer de l'homogénéité du liquide employé, en le soumettant encore une fois à la distillation fractionnée, pour le diviser ainsi en deux parties à peu près égales et déterminer de nouveau la densité de chacune de ces parties. Je trouvai alors des différences, de plusieurs unités dans la 4e décimale, qui, jointes surtout à la densité continuellement croissante [1]) des portions du liquide primitif distillées au-dessus de 57° C, me firent soupçonner que la diéthylamine en question n'avait pas été tout à fait pure et devait renfermer de petites quantités d'un ou de plusieurs autres éléments.

Pour tâcher de déceler la nature de ces matières étrangères, et en tout cas pour me procurer un produit plus pur, je préparai, avec la quantité totale des liquides distillés entre 55° et 60° C, un oxalate neutre; les cristaux qui se formèrent après l'évaporation et le refroidissement de la solution aqueuse concentrée, et qui contenaient environ les ¾ de la base, furent séparés de l'eau-mère à l'aide de la pompe à filtrer de Bunsen. Les cristaux séchés, d'une part, et

---

1) N°. 1 : 0,7291.
N°. 2 : 0,7304.
N°. 3 : 0,7319.

l'eau-mère concentrée par l'évaporation, d'autre part, furent traités par la potasse, et la base ainsi remise en liberté fut distillée, après un contact prolongé avec la potasse et la chaux. Il se trouva alors que les deux liquides ainsi obtenus s'accordaient en densité à 1 ou 2 unités de la 4_e décimale près, d'où je conclus que l'impureté, qui dans les premières déterminations avait élevé la densité de ma diéthylamine, ne pouvait avoir consisté qu'en un peu d'eau.

Le liquide, séché par un séjour prolongé sur la potasse, fut maintenant de nouveau soumis à la distillation fractionnée; cette fois, la majeure partie passa, le baromètre marquant 789^{mm}, entre 55°,3 et 55°,6. Ce produit servit aux déterminations de densité de la 3e série, qui seront communiquées plus loin.

Plus tard seulement, lorsque l'expérience m'eut de plus en plus convaincu que la diéthylamine est très hygroscopique, j'ai encore une fois rectifié ce produit, lentement et dans un bain-marie à 55° C, sur une grande quantité de soude fraîchement fondue, qui dépassait en partie le niveau du liquide. C'est avec les premiers $\frac{7}{8}$ du produit de cette rectification qu'ont été exécutées les déterminations de la 4e série.

Les 5e et 6e séries, qui furent entreprises principalement comme contrôle de la 4e série, ont été effectuées avec ce même liquide.

Au sujet du point d'ébullition de la diéthylamine pure, je crois devoir observer que l'indication donnée par M. Hofmann (57°,7 C) est indubitablement un peu trop élevée. La matière sur laquelle il a opéré contenait probablement un peu d'eau.

J'ai déterminé à différentes reprises le point d'ébullition de la diéthylamine fraîchement séchée, à l'aide d'un thermomètre d'Alvergniat ayant son réservoir situé très peu en-dessous de 50° C, de sorte que la colonne de mercure était plongée tout entière dans la vapeur du liquide. Après la correction due aux erreurs du thermomètre, j'ai trouvé ainsi pour le point d'ébullition 55°,5 C, sous une pression barométrique de 759^{mm}.

Ainsi qu'il a déjà été dit ci-dessus, j'ai fait usage, pour déterminer la densité à des températures différentes, d'un flacon de Gay-Lussac. Ce petit appareil consistait en un vaisseau sensiblement cylindrique, un peu arrondi en bas, ayant à peu près 10 cc de capacité et se terminant par le haut en un tube étroit d'environ 2 centimètres de longueur, qui s'élargissait en un réservoir infondibuliforme, servant à recevoir le liquide dilaté par la chaleur. Le tube étroit portait vers son milieu, comme repère pour le volume, une fine ligne circulaire, gravée dans le verre; l'appareil pouvait être fermé au moyen d'un bouchon soigneusement rodé.

Comparé au pycnomètre de Geissler, cet instrument offre dans son usage l'inconvénient qu'on ne peut pas s'assurer directement de l'égalité de la température à l'intérieur et à l'extérieur du vaisseau; mais, d'un autre côté, on n'a à craindre aucune évaporation sensible du liquide, durant le temps nécessaire pour échauffer ou refroidir l'appareil jusqu'à la température du local où seront faites les pesées.

D'après mon expérience, l'inconvénient signalé en premier lieu n'est pas aussi grave qu'on pourrait le supposer, et avec quelques soins il est assez facile de juger, par le niveau du liquide dans le col du flacon, si ce liquide a déjà pris la température constante du bain-marie dans lequel le flacon est placé.

Cette manière d'opérer m'a paru préférable à l'emploi de dilatomètres, tels que ceux dont M. Pierre et M. Kopp se sont servis dans leurs recherches sur la dilatation des liquides. Depuis longtemps, en effet, j'ai l'intime conviction que, si l'on met les soins nécessaires au calibrage exact des appareils au moyen de l'eau, et surtout si ce calibrage n'a pas besoin d'être exécuté pour des températures dépassant de beaucoup 50° C, on peut faire des observations très précises, tandis qu'on est alors dispensé de soumettre les appareils à une température très élevée (comme lors de l'ébullition du mercure dans les dilatomètres), opération qui, vu l'expérience acquise au sujet des changements

de volume que les appareils en verre éprouvent peu à peu, me semble toujours dangereuse.

Je ne partage donc pas, à cet égard, l'opinion de M. Isidore Pierre, qui dit (*Ann. de Ch. et de Phys.*, IV, t. XV, p. 330):

„Cette méthode offrirait cependant de grandes difficultés pour les observations courantes, parce qu'il serait très difficile de maintenir la température ambiante suffisamment longtemps constante, pour que la température du liquide, contenu dans l'appareil, fût parfaitement uniforme. Cette méthode présente néanmoins de grands avantages pour les températures que l'on peut maintenir constantes aussi longtemps que l'on veut, comme la température de la glace fondante, celle de l'eau bouillante, etc,"

Pour moi, en faisant usage de la forme allongée des flacons de Gay-Lussac, j'ai trouvé les reproches de M. Pierre exagérés, surtout quand il s'agit de liquides qui conduisent facilement la chaleur; or à cette catégorie appartiennent, si on les compare à l'eau, la plupart des combinaisons organiques. Au bout de quelques minutes, le flacon rempli de liquide a pris la température du bain-marie qui l'entoure.

En ce qui concerne la manière dont j'ai procédé, tant pour calibrer le flacon de Gay-Lussac, que pour déterminer la densité de la diéthylamine, je me permets de présenter les observations suivantes:

Pour obtenir une température de 0°, le flacon, rempli de liquide jusqu'au-dessus de la marque, était placé dans un crible en porcelaine suffisamment profond et rempli de glace pilée, de telle sorte que la glace arrivât environ jusqu'à la marque; l'eau provenant de la fusion pouvait s'écouler, par les trous du crible, dans un vase placé au-dessous. Lorsque le flacon avait séjourné un quart d'heure dans ce milieu, l'excès de liquide, ce qui dépassait la marque, était enlevé, d'abord au moyen d'une pipette à bec effilé puis à l'aide de tubes capillaires, jusqu'à ce que le liquide vînt affleurer la marque; ensuite on attendait encore un quart d'heure, pour voir si le niveau du liquide n'avait pas varié dans cet intervalle. Ordinairement, cela n'était

pas le cas; à titre exceptionnel seulement, il fallait, avec un tube capillaire rempli, ajouter un peu de liquide, afin d'amener le niveau au point précis.

Pour les déterminations de densités à des températures situées entre 0° et 20° C, il était fait usage d'un bain-marie qui avait séjourné longtemps dans un local dont, en hiver, on maintenait la température à peu près au degré voulu, en le chauffant plus ou moins fortement; les légères variations de la température du bain étaient corrigées par l'addition d'un peu d'eau chaude ou froide, accompagnée de l'agitation continuelle du liquide. Quant au reste, on opérait, dans ces déterminations de densités à des températures moyennes, tout comme il a été indiqué ci-dessus pour les observations à 0°.

Il était plus difficile d'obtenir une température constante située entre 20° et 55°. Ce qui me réussit le mieux, ce fut la méthode suivante.

Sur un bain-marie à niveau constant, couvert d'une série d'anneaux en porcelaine, était placé un vase cylindrique bas, d'environ 500 cc de capacité. A l'intérieur de ce vase on disposait un verre cylindrique plus élevé et de diamètre beaucoup moindre, ayant une capacité de 400 cc, mais rempli d'eau seulement jusqu'aux ¾. Dans celui-ci se trouvait le petit flacon, immergé exactement jusqu'à la marque. Dans le vase extérieur, placé directement sur le bain-marie, on versait de l'eau en quantité telle qu'elle s'élevât à peu près à la moitié de la hauteur de la colonne liquide contenue dans le verre intérieur. En chauffant alors le bain-marie à l'aide d'une flamme de gaz plus ou moins forte, on pouvait arriver, après quelques tâtonnements, à donner à l'eau du vase intérieur une température qui, moyennant agitation soutenue, restait constante pendant assez longtemps (15 minutes, et même plus).

Dans quelques cas, où de petites variations de température se faisaient encore sentir, on y remédiait en ajoutant de l'eau chaude ou de l'eau froide. Il n'était pas difficile de maintenir ainsi la température constante à $^{1}/_{20}$° C près.

Pour la mesure des températures, je me suis servi, dans les expériences des séries 3e et suivantes, d'un thermomètre calibré de H. W. Geissler, de Berlin; ce thermomètre était divisé en cinquièmes de degrés et, pour une ascension de 1°, la colonne mercurielle y parcourait un espace de 3½ millimètres, de sorte qu'on pouvait aisément déterminer la température du bain-marie à $^1/_{20}$° C près, limite d'exactitude que j'ai cherché à atteindre dans mes expériences. Cet instrument avait été comparé avec un excellent thermomètre de Baudin (N°. 4582), de Paris, dont la marche, vérifiée avec soin par mon collègue, M. Snijders, avait été trouvée parfaitement exacte entre les limites de ± 0,°02 tout au plus. Il va sans dire que les indications concernant la température, qui seront données plus loin, ont été corrigées des erreurs du thermomètre (après détermination des points 0° et 100°).

Relativement au calibrage du petit flacon dont je me suis servi, il convient de mentionner que, pour les densités de l'eau entre 0° et 100° C, il a été fait usage des nombres que mon ami, M. Hoek, et moi avons employés autrefois dans nos recherches sur l'indice de réfraction de liquides à différentes températures (*Recherches sur la quantité d'éther contenu dans les liquides*, la Haye, Nyhoff, 1864) et qui sont déduits de l'ensemble des résultats obtenus par les observateurs les plus dignes de confiance.

Enfin, je crois devoir faire encore, au sujet de la manière dont j'ai opéré, les remarques suivantes.

Il est clair que le pycnomètre rempli, après qu'il a pris la température ambiante et qu'on y a ramené le liquide au niveau de la marque, ne peut pas, dans la plupart des cas, être pesé immédiatement; en effet, s'il a une température inférieure à celle de l'air enveloppant la balance, de la vapeur d'eau se condensera facilement à sa surface extérieure; et s'il est au contraire plus chaud, les pesées peuvent devenir inexactes par suite

de l'allongement d'un des bras de la balance sous l'action de la chaleur qui rayonne du verre et de l'air chaud qui s'en élève.

Pour obvier à ces inconvénients et prévenir autant que possible l'évaporation, j'ai tâché, en plaçant le flacon, fermé de son bouchon immédiatement après l'observation, dans une grande masse d'eau à la température de la chambre, de lui faire prendre celle-ci aussi rapidement que possible. Avec des liquides tels que la diéthylamine, qui sont moins volatils que l'éther, on n'a alors pas à craindre les pertes par évaporation, mais quelquefois, surtout lorsque l'appareil est ramené subitement d'une température assez élevée à une température relativement basse, on rencontre une autre difficulté, à savoir, que le volume du flacon et son coefficient de dilatation peuvent changer; après chaque série d'observations, il est donc nécessaire de s'assurer si un pareil changement a eu lieu ou non, en calibrant de nouveau le pycnomètre par la pesée avec de l'eau à différentes températures.

Avec le flacon de Gay-Lussac dont j'ai fait usage, le phénomène en question se produisit au début des expériences, mais plus tard, après que le flacon eut servi dans une série de déterminations, où il avait été exposé à des variations de température très diverses et parfois brusques, son volume resta constant pour une même température. Déjà antérieurement, à l'occasion de déterminations de la densité de l'éther, j'avais constaté la même chose avec d'autres pycnomètres.

Je ferai remarquer, à ce propos, que la dilatation des appareils que j'ai étudiés sous ce rapport est chez beaucoup d'entre eux proportionnelle à l'accroissement de température, et que chez d'autres au contraire elle ne l'est pas, de sorte que, pour représenter le volume de ces derniers, on doit avoir recours à une formule de la forme $V^t = V^0 + a\,t + b\,t^2$; ensuite, que certains pycnomètres se montrent d'emblée inaltérables, tandis que d'autres dénotent une grande sensibilité aux changements temporaires de la température. Cela, d'ailleurs, est en parfait accord avec ce que l'expérience nous a appris au sujet des

allures variables, et parfois bizarres, qu'affectent les thermomètres[1].

Je passe maintenant à l'exposé des résultats qu'ont donnés mes expériences.

Pour qu'on puisse mieux les embrasser, je les disposerai en tableaux, dont la 1ère colonne contiendra les températures corrigées, la 2e les densités déduites directement de l'observation, la 3e les densités déduites de la formule pour le volume, et la 4e les différences entre les valeurs observées et calculées, en unités de la 5e décimale.

Pour les 3e et 4e séries, qui ont été exécutées avec le plus de soins et auxquelles, en conséquence, j'attache moi-même le plus d'importance, la formule représentant le volume a été déduite d'un certain nombre de déterminations de densités faites à 0° et au voisinage de 18°, de 36° et de 54° C. (Dans les tableaux, ces déterminations sont indiquées par des accolades). Les moyennes de ces quatre séries de chiffres ont été réduites à 0°, 18°, 36° et 54°, et les quatre valeurs ainsi obtenues ont servi à calculer les coefficients a, b et c de la formule $V^t = V^0 (1 + a t + b t^2 + c t^3)$.

Dans le calcul des résultats des 1e et 2e séries, j'ai supposé que la densité, entre les limites de température où j'observais, décroissait uniformément. On verra plus loin, dans le tableau synoptique des résultats, que cette supposition ne conduit pas à des écarts très grands entre les densités ainsi obtenues et celles qui ont été calculées au moyen de la formule déduite des séries 3 et 4.

[1]) Il est probable que ce changement temporaire du volume doit se présenter aussi chez les dilatomètres, et d'autant plus qu'ils ont été exposés à des températures plus élevées (comme lors de l'ébullition du mercure). Il me paraît que cette source d'erreurs, dans les déterminations de densités, n'a pas toujours attiré suffisamment l'attention.

PREMIÈRE SÉRIE.

Formule pour le volume.

$$Vt = 0^o\ (1 + 0.001511\ t),$$

calculée au moyen des observations à 0°, 34°2, 36° et 39°7.

T.	D observée.	D calculée.	O—C.
0° C.	0.72774	0.72776	— 2
0° „	0.72778	0.72776	+ 2
9°.6 „	0.71769	0.71774	+ 5
11°.0 „	0.71592	0.71630	— 38
12°.0 „	0.71561	0.71525	+ 36
16°.0 „	0.71123	0.71108	+ 15
16°.8 „	0.71050	0.71025	+ 25
17°.2 „	0.71006	0.70983	+ 23
18°.0 „	0.70934	0.70900	+ 34
23°.4 „	0.70338	0.70337	+ 1
27°.2 „	0.69951	0.69941	+ 10
29°.4 „	0.69714	0.69712	+ 2
34°.2 „	0.69222	0.69212	+ 10
34°.2 „	0.69204	0.69212	— 8
34°.3 „	0.69199	0.69201	— 2
36°.0 „	0.69034	0.69024	+ 10
36°.0 „	0.69026	0.69024	+ 2
39°.7 „	0.68629	0.68638	— 9

De la formule calculée se déduisent les valeurs suivantes pour les volumes et les densités à des températures entre 0° et 40° C.

T.	V.	Δ
0° C.	1.00000	
		756
5° „	1.00756	
		755
10° „	1.01511	
		756
15° „	1.02267	
		755
20° „	1.03022	
		756
25° „	1.03778	
		755
30° „	1.04533	
		756
35° „	1.05289	
		755
40° „	1.06044	

T.	D.	Δ
0° C.	0.72776	
		521
5° „	0.72255	
		521
10° „	0.71734	
		521
15° „	0.71213	
		521
20° „	0.70692	
		521
25° „	0.70171	
		521
30° „	0.69640	
		521
35° „	0.69129	
		522
40° „	0.68607	

DEUXIÈME SÉRIE.

Formule pour le volume:

$$V^t = V^0 (1 + 0.0015195\, t)$$

calculée au moyen des observations à 0° C., 36°4 et 36°5.

T.	D observée.	D calculée.	O—C.
0° C.	0.72804	0.72809	— 5
0° „	0.72804	0.72809	— 5
0° „	0.72814	0.72809	+ 5
0° „	0.72814	0.72809	+ 5
5°.7 „	0.72202	0.72212	— 10
6°.0 „	0.72197	0.72180	+ 17
10°.0 „	0.71790	0.71761	+ 29
12°.3 „	0.71523	0.71520	+ 3
13°.8 „	0.71391	0.71362	+ 29
14°.9 „	0.71232	0.71247	— 15
19°.8 „	0.70754	0.70733	+ 21
36°.4 „	0.68982	0.68988	— 6
36°.5 „	0.68993	0.68987	+ 6

De la formule calculée se déduisent les valeurs suivantes pour les volumes et les densités à des températures entre 0° et 40° C.

T.	V.	Δ.
0° C.	1.00000	
		760
5° „	1.00760	
		760
10° „	1.01520	
		759
15° „	1.02279	
		760
20° „	1.03039	
		760
25° „	1.03799	
		760
30° „	1.04559	
		759
35° „	1.05318	
		760
40° „	1.06078	

T.	V.	Δ
0° C.	0.72809	
		524
5° „	0.72285	
		524
10° „	0.71761	
		524
15° „	0.71237	
		524
20° „	0.70712	
		524
25° „	0.70188	
		524
30° „	0.69664	
		524
35° „	0.69140	
		524
40° „	0.68616	

TROISIÈME SÉRIE *).

Formule pour le volume:

$$V_t = V^0(1 + 0{,}0014013\,t + 0.00000341\,t^2 - 0.00000000311\,t^3)$$

calculée du moyen des observations à $\pm\,0^0$, $\pm\,18^0$, $\pm\,36$ et $\pm\,54$.

T.	D observée.	D calculée.	O.—C.
0° C.	0.72741	0.72740	+ 1
0° „	0.72744	0.72740	+ 4
0° „	0.72754	0.72740	+ 14
0° „	0.72741	0.72740	+ 1
0° „	0.72733	0.72740	— 7
0° „	0.72724	0.72740	— 16
6°.9 „	0.72021	0.72031	— 10
7°.3 „	0.71985	0.71990	— 5
13°.6 „	0.71335	0.71332	+ 3
14°.2 „	0.71295	0.71271	+ 24
18°.0 „	0.70863	0.70874	— 9
18°.0 „	0.70879	0.70874	+ 5
18°.4 „	0.70841	0.70832	+ 9
18°.5 „	0.70805	0.70822	— 17
19°.0 „	0.70772	0.70770	+ 2
23°.0 „	0.70342	0.70353	— 11
27°.5 „	0.69823	0.69869	— 46
29°.3 „	0.69617	0.69618	— 1
30°.4 „	0.69562	0.69559	+ 3
35°.3 „	0.69023	0.69039	— 16
35°.75 „	0.68972	0.68992	— 20
35°.8 „	0.69003	0.68985	+ 18
36°.3 „	0.68942	0.68933	+ 9
36°.4 „	0.68918	0.68923	— 5
37°.0 „	0.68880	0.68857	+ 23
42°.4 „	0.68294	0.68279	+ 15
43°.6 „	0.68138	0.68151	— 13
45°.3 „	0.67966	0.67968	— 2
46°.7 „	0.67845	0.67821	+ 24
53°.2 „	0.67127	0.67118	+ 9
54°.0 „	0.67034	0.67032	+ 2
54°.0 „	0.67022	0.67032	— 10
54°.8 „	0.66944	0.66946	— 2

1) Au début de cette série, le volume et le coefficient de dilatation du

De la formule calculée se déduisent les valeurs suivantes pour les volumes et les densités à des températures entre 0° et 55° C.

T.	V.	Δ
0° C.	1.00000	709
5° „	1.00709	726
10° „	1.01435	743
15° „	1.02178	759
20° „	1.02937	775
25° „	1.03712	791
30° „	1.04503	806
35° „	1.05309	822
40° „	1.06131	837
45° „	1.06968	851
50° „	1.07820	867
55° „	1.08687	

T.	V.	Δ
0° C.	0.72740	512
5° „	0.72228	517
10° „	0.71711	522
15° „	0.71189	524
20° „	0.70665	528
25° „	0.70137	531
30° „	0.69606	533
35° „	0.69073	535
40° „	0.68538	536
45° „	0.68002	538
50° „	0.67464	538
55° „	0.66926	

---

flacon furent déterminés de nouveau et trouvés changés. J'obtins maintenant pour le volume du flacon $V_t = 9{,}9446 + 0{,}000158\, t$, comme résultat de 17 déterminations, le plus grand écart entre les valeurs calculées et observées s'élevant à 0,0024 cc et l'écart moyen à 0,0005 cc.

Pour dissiper tous les doutes au sujet de ce changement de volume, je ferai remarquer que le volume 9,9525, tel qu'au début de la 3e série il fut trouvé pour la température de 50° C, correspondait initialement à une température de 25° C, — puis, que ce phénomène ne s'est plus reproduit lors des recherches que je fis après l'achèvement des 3e, 4e, 5e et 6e séries de mes déterminations ; il ne peut donc, en aucun cas, être ici question d'erreurs expérimentales.

QUATRIÈME SÉRIE.

Formule calculée pour le volume:

$$V_t = V^0 (1 + 0.001398\, t + 0.000002702\, t^2 + 0.00000001226\, t^3)$$

T.		D observée.	D calculée.	O.—C.
0°	C.	0.72624	0.72628	— 4
0°	„	0.72631	0.72628	+ 3
0°	„	0.72627	0.72628	— 1
0°	„	0.72628	0.72628	0
14°.4	„	0.71141	0.71153	— 12
16°.8	„	0.70910	0.70904	+ 6
17°.75	„	0.70802	0.70805	— 3
17.°85	„	0.70796	0.70794	+ 2
17°.9	„	0.70789	0.70790	— 1
18°.0	„	0.70772	0.70780	— 8
18°.8	„	0.70702	0.70697	+ 5
24°.0	„	0.70135	0.70153	— 18
29°.3	„	0.69600	0.69594	+ 6
33°.8	„	0.69124	0.69115	+ 9
35°.55	„	0.68921	0.68930	— 9
35°.85	„	0.68885	0.68897	— 12
36°.2	„	0.68875	0.68859	+ 16
37°.9	„	0.68675	0.68677	— 2
42°.0	„	0.68239	0.68235	+ 4
47°.4	„	0.67649	0.67637	+ 12
48°.8	„	0.67503	0.67493	+ 10
53°.0	„	0.67058	0.67030	+ 28
53°.6	„	0.66950	0.66964	— 14
53°.8	„	0.66914	0.66941	— 27
54°.4	„	0.66880	0.66875	+ 5
54°.4	„	0 66881	0.66875	+ 6

De la formule calculée se déduisent les valeurs suivantes pour les volumes et les densités à des températures entre 0° et 55° C.

T.	V.	Δ	T.	D.	Δ
0° C.	1.00000	706	0° C.	0.72628	510
5° „	1.00706	720	5° „	0.72118	511
10° „	1.01426	736	10° „	0.71607	516
15° „	1.02162	752	15° „	0.71091	519
20° „	1.02914	769	20° „	0.70572	524
25° „	1.03683	788	25° „	0.70048	528
30° „	1.04471	806	30° „	0.69520	532
35° „	1.05277	826	35° „	0.68988	537
40° „	1.06103	847	40° „	0.68451	542
45° „	1.06950	869	45° „	0.67909	548
50° „	1.07819	892	50° „	0.67361	552
55° „	1.08711		55° „	0.66809	

CINQUIÈME ET SIXIÈME SÉRIES.

La connaissance que j'avais acquise de l'hygrescopicité de la diéthylamine me faisait craindre que dans les déterminations précédentes, en dépit de toutes les précautions prises, il avait encore pu se glisser des erreurs, dues à ce que la diéthylamine aurait enlevé de la vapeur d'eau à l'air, pendant qu'on ouvrait et fermait le flacon, manœuvre fréquemment répétée au cours de l'expérience.

Pour décider jusqu'à quel point cette crainte était fondée, j'exécutai encore deux séries, chacune de 4 déterminations seulement, à des températures voisines de 0°, 18°, 36° et 54°, températures qui étaient croissantes dans une des séries et

décroissantes dans l'autre. Ces deux séries pouvaient être achevées chacune en un seul jour, et il n'y avait guère à craindre l'absorption de vapeur d'eau, attendu que le flacon n'avait besoin d'être débouché qu'un petit nombre de fois.

Les résultats furent les suivants:

5e Série. Températures croissantes.		6e Série. Températures décroissantes.	
T.	D.	T.	D.
0° C.	0.72648	0° C.	0.72659
19°.2 "	0.70675	18°.0 "	0.70813
34°.2 "	0.69097	36° "	0.68916
53°.8 "	0.66962	54°.4 "	0.66908

En réduisant les trois dernières observations aux températures 18°, 36° et 54°, à l'aide des différences trouvées précédemment pour 1° C, on obtient:

5e Série.		6e Série.	
0° C.	0.72648	0° C.	0.72659
18° "	0.70800	18° "	0.70813
36° "	0.68906	36° "	0.60916
54° "	0.66940	54° "	0.66952

Si l'on compare ces résultats avec ceux qui avaient été obtenus dans la quatrième série, on voit que les différences entre les densités aux quatre températures indiquées sont à peu près égales. Entre les chiffres des séries 5 et 6 il y a une différence

d'environ 2 unités de la quatrième décimale, et entre ceux des séries 6 et 4 une différence d'environ 8 de ces unités, ce qui doit indubitablement être attribué à la vapeur d'eau absorbée durant le temps (environ 17 heures) que le liquide en expérience était resté abandonné à lui-même dans le flacon de Gay-Lussac.

En définitive, je crois donc pouvoir admettre que les chiffres obtenus dans la 4e série sont ceux qui méritent le plus de confiance.

Quelques déterminations de densités, faites plus tard, avec de la diéthylamine distillée sur de l'hydrate de soude fraîchement fondu, m'ont donné les résultats suivants:

	0.72619
	0.72624
	0.72625
Moyenne	0.72623

chiffre qui se rapproche beaucoup de celui que j'avais trouvé antérieurement. Si, n'employant que 4 décimales dans l'indication des densités, nous adoptons le nombre 0.7262 pour la densité à 0° C, et que nous réduisions à ce nombre les chiffres trouvés précédemment pour la densité à 0° C, nous obtenons le tableau synoptique suivant des résultats fournis par les différentes séries:

T.	1e Série.	2e Série.	3e Série.	4e Série.	5e Série.	6e Série.
0° C.	0.7262	0.7262	0.7262	0.7262	0.7262	0.7262
5° "	0.7210	0.7210	0.7210	0.7211		
10° "	0.7158	0.7158	0.7159	0.7160		
15° "	0.7106	0.7106	0.7107	0.7108		
18° "	0.7074	0.7074	0.7076	0.7077	0.7077	0.7077
20° "	0.7054	0.7053	0.7055	0.7056		
25° "	0.7002	0.7001	0.7002	0.7004		
30° "	0.6949	0.6948	0.6948	0.6951		
35° "	0.6896	0.6895	0.6895	0.6898		
36° "	0.6887	0.6884	0.6884	0.6887	0.6888	0.6888
40° "	0.6845	0.6843	0.6842	0.6844		
45° "			0.6788	0.6790		
50° "			0.6734	0.6735		
54° "			0.6690	0.6691	0.6691	0.6692
55° "			0.6681	0.6680		

d'où l'on peut déduire, comme valeurs les plus probables de la densité de la diéthylamine aux températures de 0°—55° C, les nombres suivants:

T.	D.	Δ
0° C.	0.7262	
		51
5° „	0.7211	
		52
10° „	0.7159	
		52
15° „	0.7107	
		52
20° „	0.7055	
		53
25° „	0.7002	
		53
30° „	0.6949	
		52
35° „	0.6897	
		53
40° „	0.6844	
		54
45° „	0.6790	
		55
50° „	0.6735	
		55
55° „	0.6680	

SUR LA FORME CRISTALLINE

DE L'α-DINITRODIMÉTHYLANILINE,

PAR

A. P. N. FRANCHIMONT.

En 1877, M. K. H. Mertens a préparé une dinitrodiméthylaniline [1]). Une partie de diméthylaniline est versée lentement et par petites fractions dans un mélange, refroidi au besoin, de 15 parties d'acide nitrique ordinaire et de 15 parties d'eau. Après six heures de repos, il s'est formé une bouillie cristalline, qu'on purifie par des lavages à l'eau et par une nouvelle cristallisation d'une solution alcoolique chaude. L'opération de la dissolution laisse, comme résidu, un isomère insoluble dans l'alcool bouillant. La cristallisation dans l'alcool ayant encore été répétée une couple de fois, la substance se présente sous la forme de belles aiguilles jaunes à faible reflet bleu, qui atteignent quelquefois 6 centim. de longueur; quand la cristallisation se fait lentement, elle donne naissance à des prismes courts; longs ou courts, les cristaux fondent à 87° C.

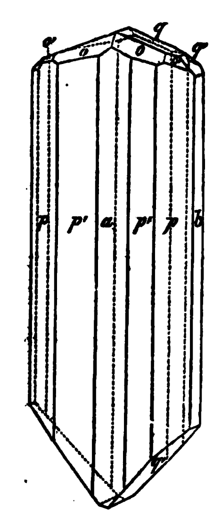
M. Mertens indique en outre, comme propriétés de cette matière, qu'elle est insoluble dans l'eau, peu soluble dans l'éther, facilement soluble au contraire dans l'alcool chaud (où elle se fond, avant la dissolution, en un liquide oléagineux), dans l'acide acétique, dans l'acide chlorhydrique, mais surtout dans la benzine, d'où elle cristallise en magnifiques prismes transparents, de couleur jaune brunâtre, doués d'un vif éclat et appartenant probablement au système clinorhombique.

[1]) *Over nitroderivaten van dimethylaniline.* Dissertation inaugurale, Leiden, S C. van Doesburgh, 1877. — Voir aussi: *Ber. d. d. chem. Ges. zu Berlin*, X, S. 995. *Vorläufige Notiz*

En chauffant cette dinitrodiméthylaniline avec une solution de potasse, M. Mertens a obtenu de la diméthylamine et de l'α-dinitrophénol, ce qui en éclaire la structure: les groupes $Az\,O_2$ y occupent les mêmes positions relatives que dans l'α-dinitrophénol, donc 1, 2, 4, si 1 est la place du groupe $Az\,H_2$ et du groupe hydroxyle.

Je puis maintenant ajouter quelque chose à la connaissance de ce corps, en mentionnant que sa solution dans la benzine n'exerce pas d'action sur la lumière polarisée et en décrivant sa forme cristalline.

Des mesures que j'ai exécutées, il résulte que les cristaux appartiennent au système *orthorhombique*, ce qui est confirmé aussi par leurs propriétés optiques.



La figure ci-jointe représente un des cristaux étudiés, fortement grossi.

Les formes observées sont $a = \infty \bar{P} \infty$ (100), $b = \infty \breve{P} \infty$ (010), $p = \infty P$ (110), $p' = \infty \bar{P} 2$ (210), $q = \breve{P} \infty$ (011), $q' = 3 \breve{P} \infty$ (031), $o = P$ (111), $o' = 2 \breve{P} 2$ (121). Le rapport des axes, calculé au moyen des faces p et q, qui ne manquent presque jamais, est:

$$a : b : c = 0.60766 : 1 : 0.36009.$$

Les mesures ont porté sur dix cristaux, dont cinq étaient de taille moyenne, mais bien conformés à une extrémité seulement; parmi les cinq autres, il y en avait quatre très petits et un très grand, mais bien conformé aux deux bouts.

Comme le montre la figure, les faces homologues sont toujours de dimensions très inégales. Le macropinacoïde a est ordinairement très large, mais toujours à l'un des côtés (dans la figure le côté postérieur) beaucoup plus large qu'au côté opposé; le brachypinacoïde b a généralement très peu de largeur. Les faces des prismes (surtout p') et le macropinacoïde sont d'ordinaire striés longitudinalement; aussi n'est-il pas rare de trouver des cristaux

maclés parallèlement aux prismes. Des pyramides, o' est la plus fréquente, mais très rarement on rencontre, à l'une des extrémités du cristal, les quatre faces réunies; le plus souvent on ne voit que les deux faces sur la macrodiagonale, moins souvent celles sur la brachydiagonale. Lorsqu'elles existent à l'extrémité supérieure du cristal, elles manquent ordinairement à l'extrémité inférieure, et quand elles s'y trouvent, elles sont placées au même côté qu'à l'extrémité supérieure: ainsi, par exemple, on verra, en haut et en bas, les deux faces à droite sur la macrodiagonale, ou bien les deux faces en avant sur la brachydiagonale. Des faces des dômes, q existe presque toujours; dans les petits cristaux aciculaires, q' prédomine.

Le tableau suivant fait connaître, pour les différents angles, le nombre des mesures effectuées, les valeurs limites, les valeurs moyennes et les valeurs calculées.

Angles.	Nombre des mesures.	Valeurs limites.		Valeurs moyennes	Valeurs calculées.
$p:p$ sur b	7	62°18′	62°40′	62°34′17″	
$q:q$ „ c	18	140°	140°50′	140°23′37″	
$p':p'$ „ b	10	33°16′	34°24′	33°55′6″	33°48′5″
$p':p'$ „ a	2	146°24′	146°29′	146°26′30″	146°11′55″
$p':p$	3	164°37′	164°52′	164°45′40″	165°36′54″
$p:b$	5	120°50′	121°8′	121°0′30″	121°17′8″
$p:a$	1			148°12′	148°42′51″
$p':a$	16	163°16′	163°55′	163°32′26″	163°5′58″
$q:b$	7	109°36′	110°2′	109°43′26″	109°48′12″
$q:p$	17	99°24′	100°10′	99°55′15″	100°7′59″
$q:a$	2	90°	90°	90°	90°
$q:q'$	7	152°6′	152°57′	152°38′52″	152°35′37″
$q':b$	6	136°15′	137°32′	137°6′20″	137°12′34″
$q':a$	2	90°	90°	90°	90°
$o:o$ sur b	1			121°52′	121°43′3″
$o:q$	1			150°56′	150°51′33″
$o:a$	1			119°4′	119°8′27″
$o':o'$ sur b	3	128°38′	128°40′	128°39′20″	128°38′22″
$o':o'$ „ a	3	116°23′	116°28′	116°25′20″	116°26′25″
$o':p$	1			130°	130°4′38″
$o':p'$	7	124°10′	125°	124°35′35″	124°35′34″
$o':q$	8	150°	150°15′	150°6′18″	150°3′16″
$o':q'$	4	152°	152°15′	152°8′30″	152°2′32″

L'angle $p:p$, qui a servi au calcul des axes, a été mesuré principalement sur des cristaux où b était à peine observable,

Outre les formes mentionnées, j'ai encore trouvé, chez un seul cristal, une très petite face sur l'arête de *o* et *o*, en *a*; elle faisait des angles très différents avec les deux faces de la pyramide et n'était donc pas un dôme macrodiagonal: avec l'une des faces pyramidales l'angle mesuré était de 165°28′, avec l'autre, de 131°.

Chez deux cristaux, l'un de grandeur moyenne et l'autre petit, j'ai observé une grande face oblique, qui, ne reposant ni sur le macropinacoïde, ni sur les prismes, occupe presque entièrement l'une des extrémités du cristal, où, en dehors d'elle, on ne voit plus qu'une petite face *q′* à l'un des côtés. C'est surtout le premier de ces cristaux, à l'origine le seul qui parût bien conformé aux deux bouts, qui avait donné lieu à l'opinion que la substance cristallisait dans le système clinorhombique. La face en question est assez mate, et la mesure des angles qu'elle fait avec *a*, *p′* et *p*, angles d'où ne résulte aucun rapport avec les autres formes observées, me porte à la regarder comme une face accidentelle, par laquelle le cristal était attaché au cristallisoir.

La substance ne présente pas d'indices évidents de clivages.

Lorsque les cristaux sont examinés, à travers les faces *a*, à la lumière polarisée convergente, les deux axes optiques, avec leurs systèmes d'anneaux, s'observent nettement, très rapprochés l'un de l'autre et la ligne de jonction dirigée de *b* vers *b*; ils sont donc situés dans le plan de *c*; *a* est la bissectrice aiguë. Les cristaux sont négatifs et $\varrho < v$.

Pour l'angle apparent des axes optiques, 2 *E*, mesuré dans l'air à la lumière du sodium, j'ai trouvé, comme moyenne de 24 déterminations, la valeur 23°30′. Finalement, je noterai encore que, parmi tous les cristaux étudiés, il n'y en avait aucun qui se prêtât à l'application de la méthode (mesure de l'angle que font entre eux les axes optiques sortant des faces des prismes, etc.) que M. Groth a indiquée dans sa *Physikalische Kristallographie*, p. 482 et 483, pour apprendre à connaître l'angle vrai 2 *V* des axes optiques.

Leide, *octobre* 1881.

ARCH. NE

Fro
des
Ban
Ro
Cim.
Vill
Riv
G. G
Echelle 1:

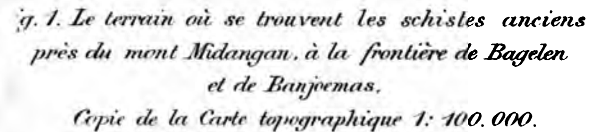
N
S

B
Loh Kidan
Loh-Kidang
Loh-Ulu

Fi

ntière
Résidences
joemas et Bagelen.
ıtes.
es des montagnes.
ıges.
ières.
unung. Mont.
100. 000.

BANJOEMAS
BAGELEN
G. MIDANGAN
Samagoen
Pesangkalan
Kedong-Gong
Sigendit
Toengkoe
Loh-Ulu
Sadang
Loh-Ulu
Poetjangan
G. PARAS


ig. 1. Le terrain où se trouvent les schistes anciens près du mont Midangan, à la frontière de Bagelen et de Banjoemas,
Copie de la Carte topographique 1: 100.000.

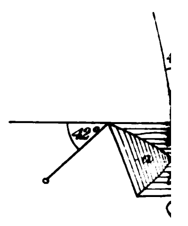


Fig. 4. *Cristal*
longueur
de la la

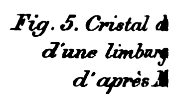


Fig. 5. *Cristal d*
d'une limbur
d'après M



Fig. 6. *Cri*
di
avec des i
d



Fig. 7. *Crista*
diam
de la

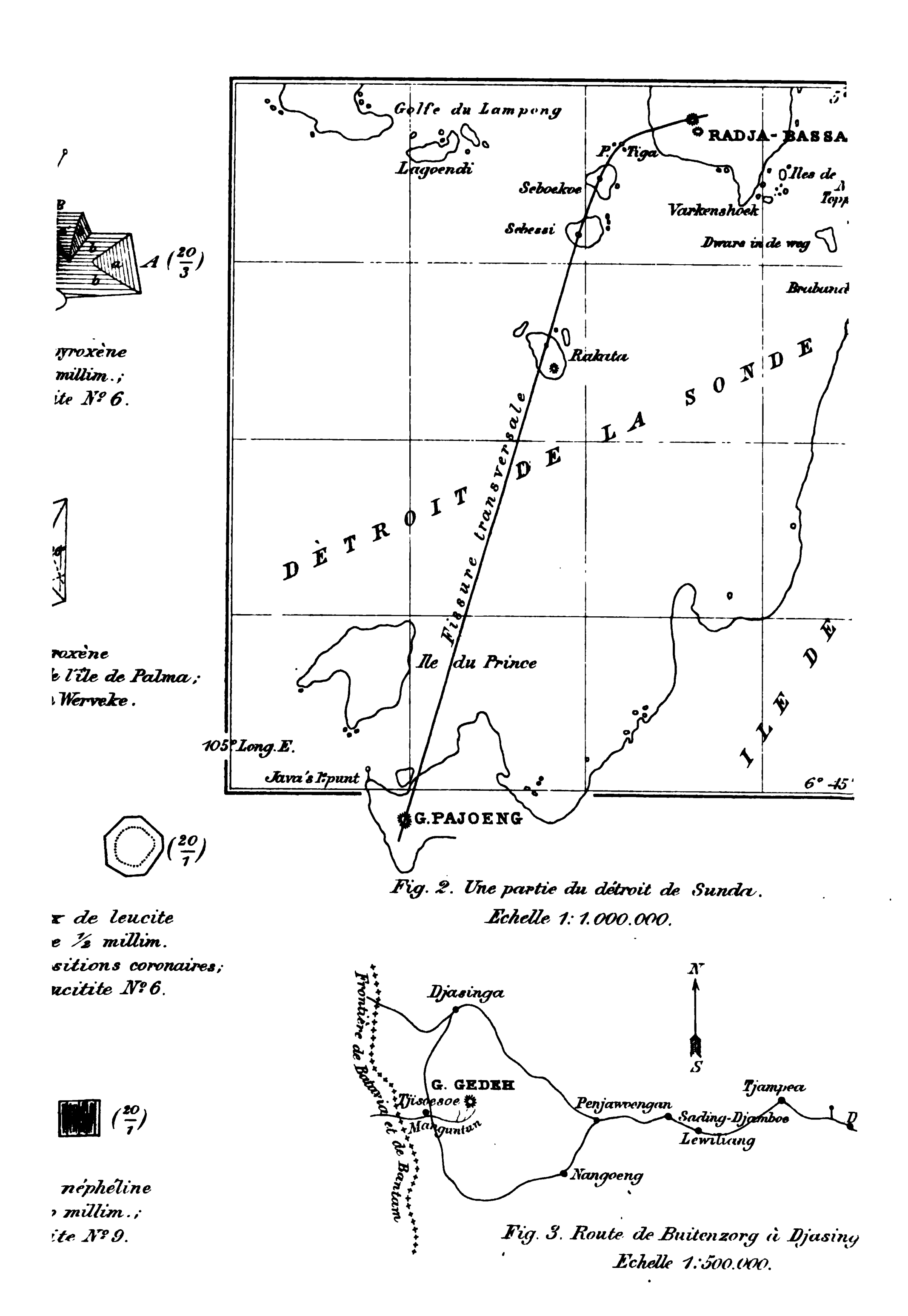


Fig. 2. Une partie du détroit de Sunda.
Echelle 1: 1.000.000.

Fig. 3. Route de Buitenzorg à Djasing
Echelle 1:500.000.

PL. II.

45' Lat. S.

utphen
olaus punt
rshoedje

Dº Merak

hoedje
Anjer

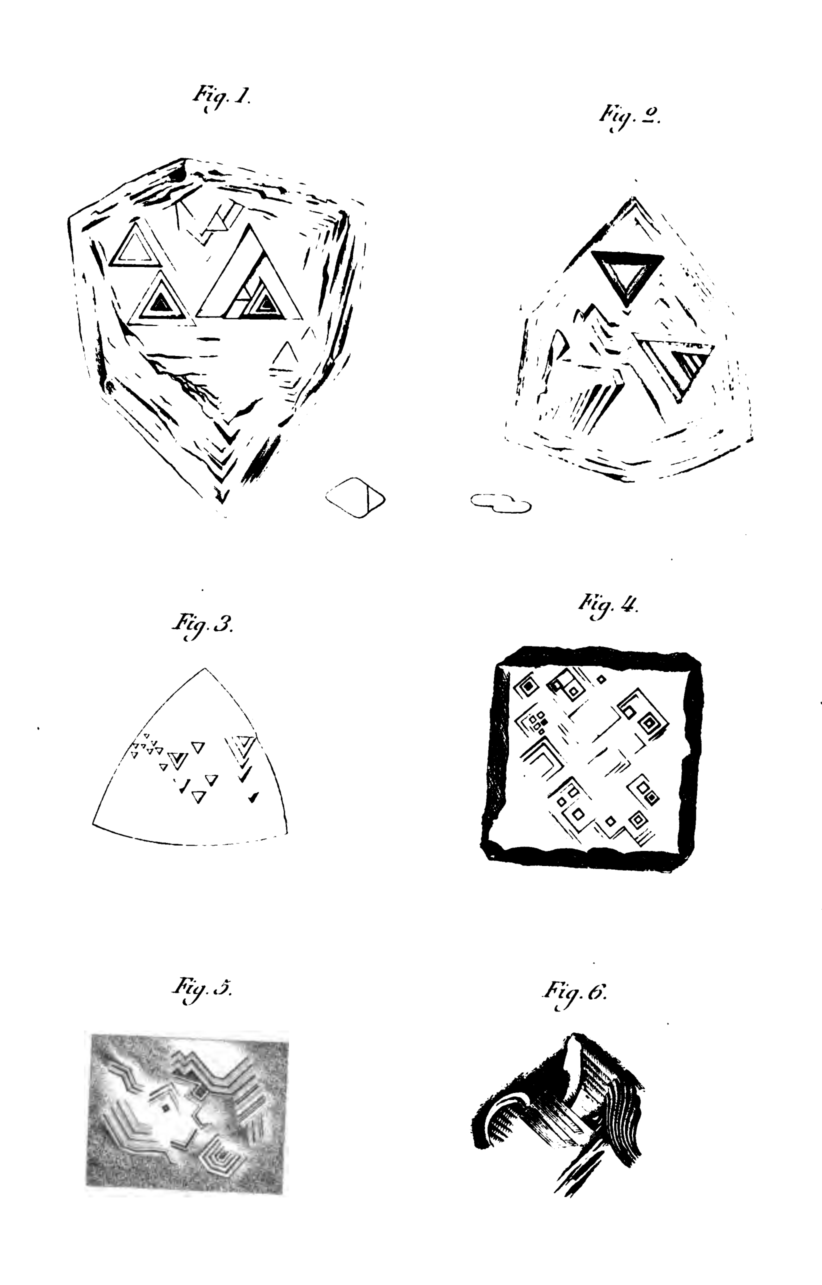
J A V A

106° Long. E.

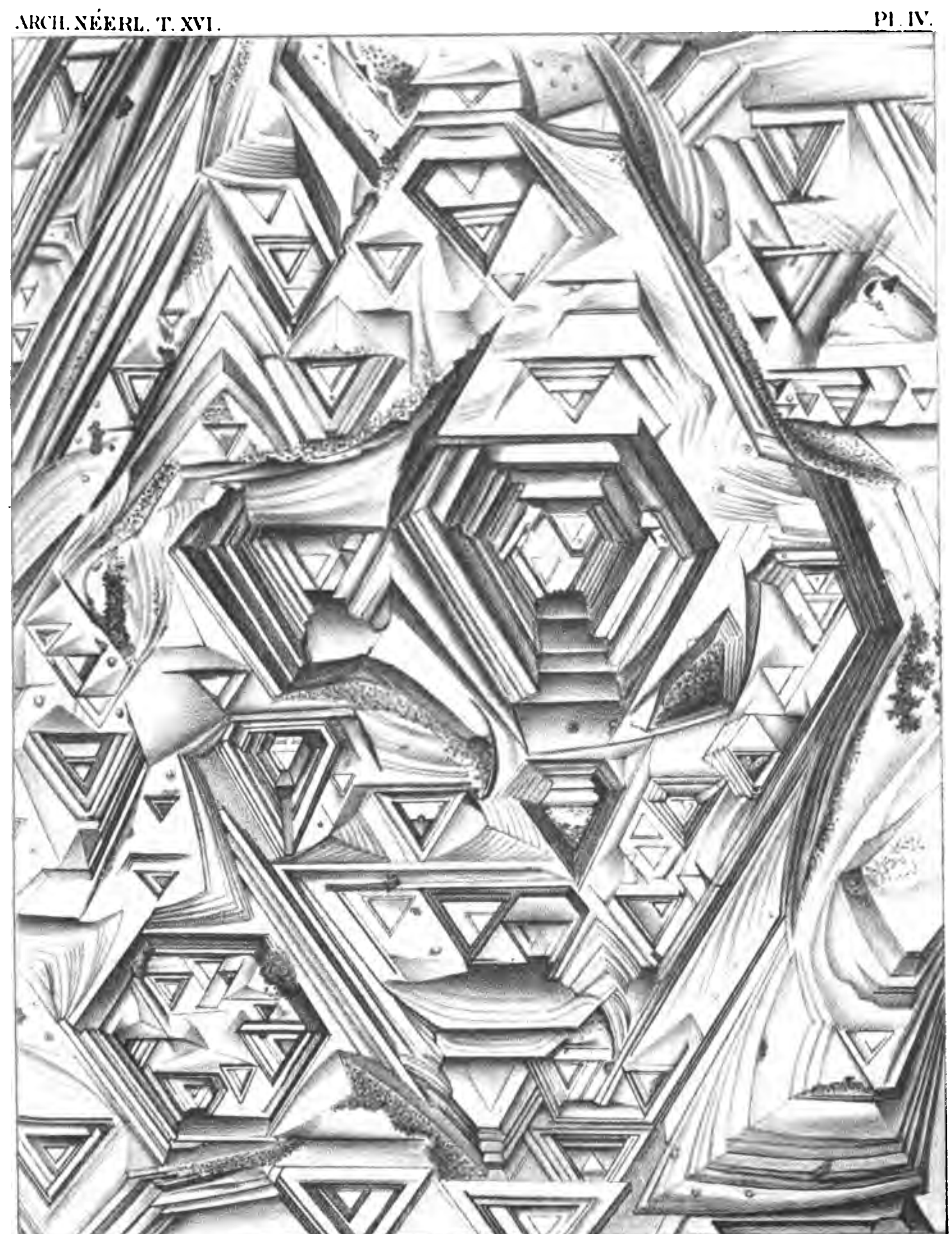
Lat. S.

maga

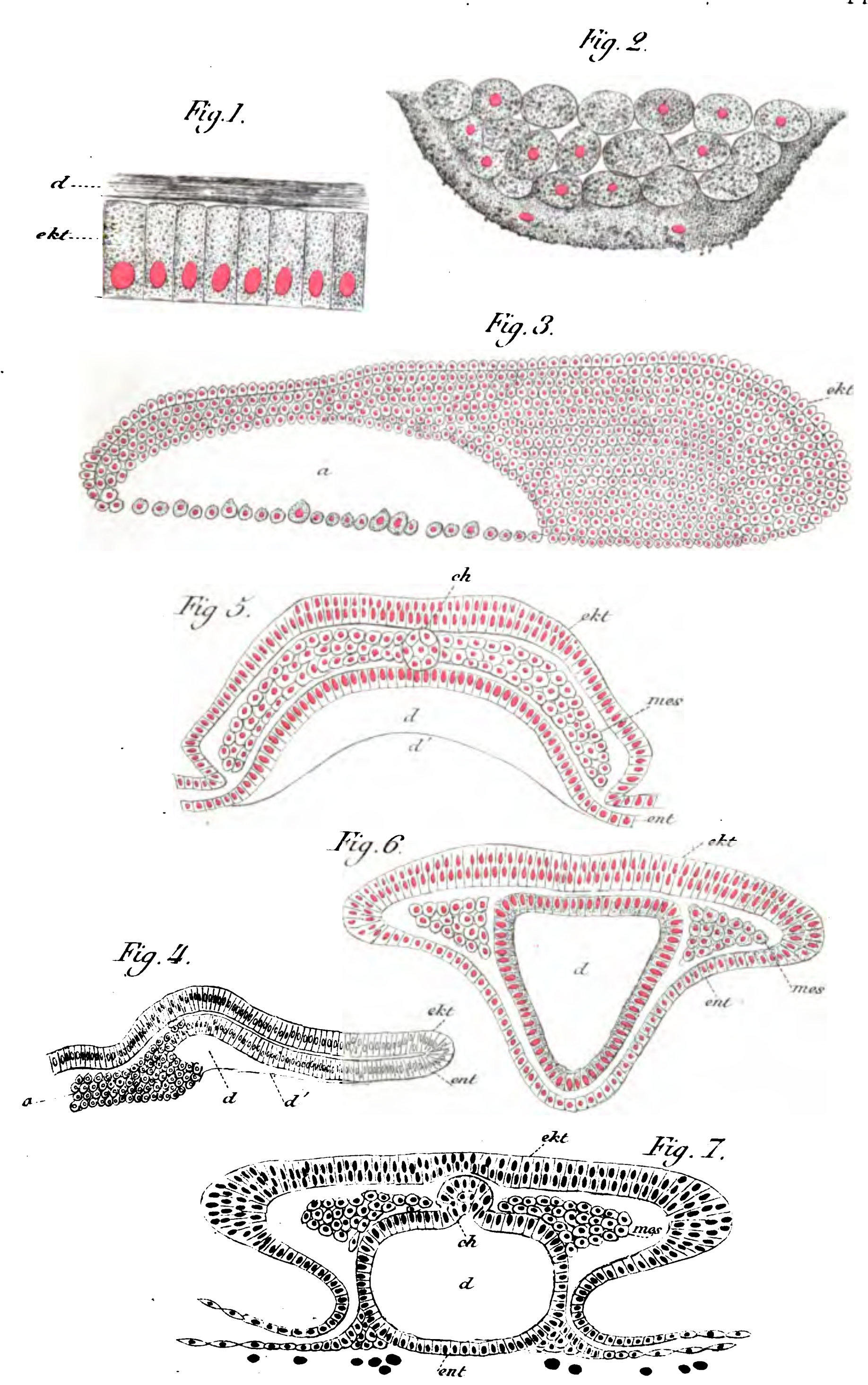
Buitenzorg



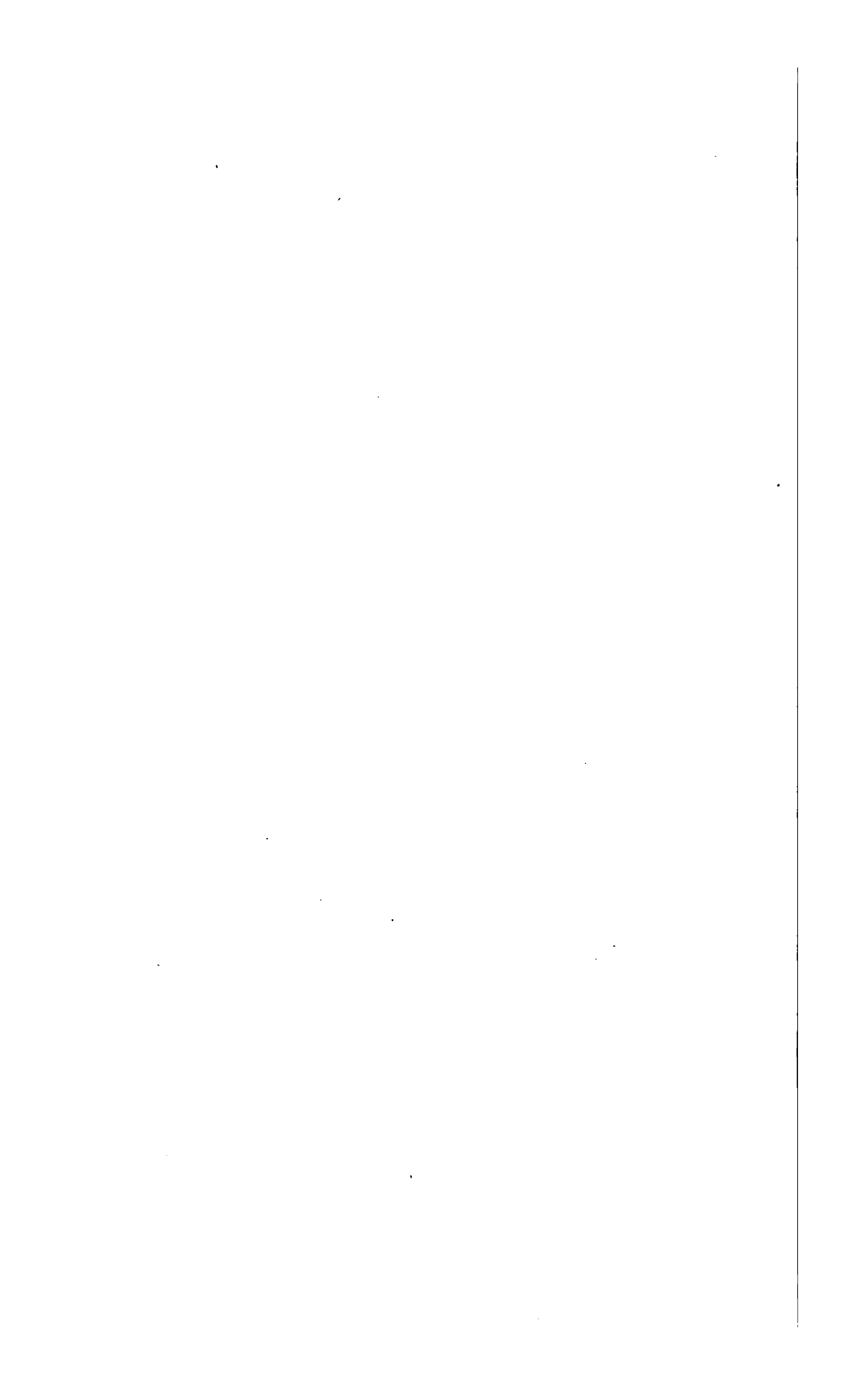
Lith. Emrik & Binger.

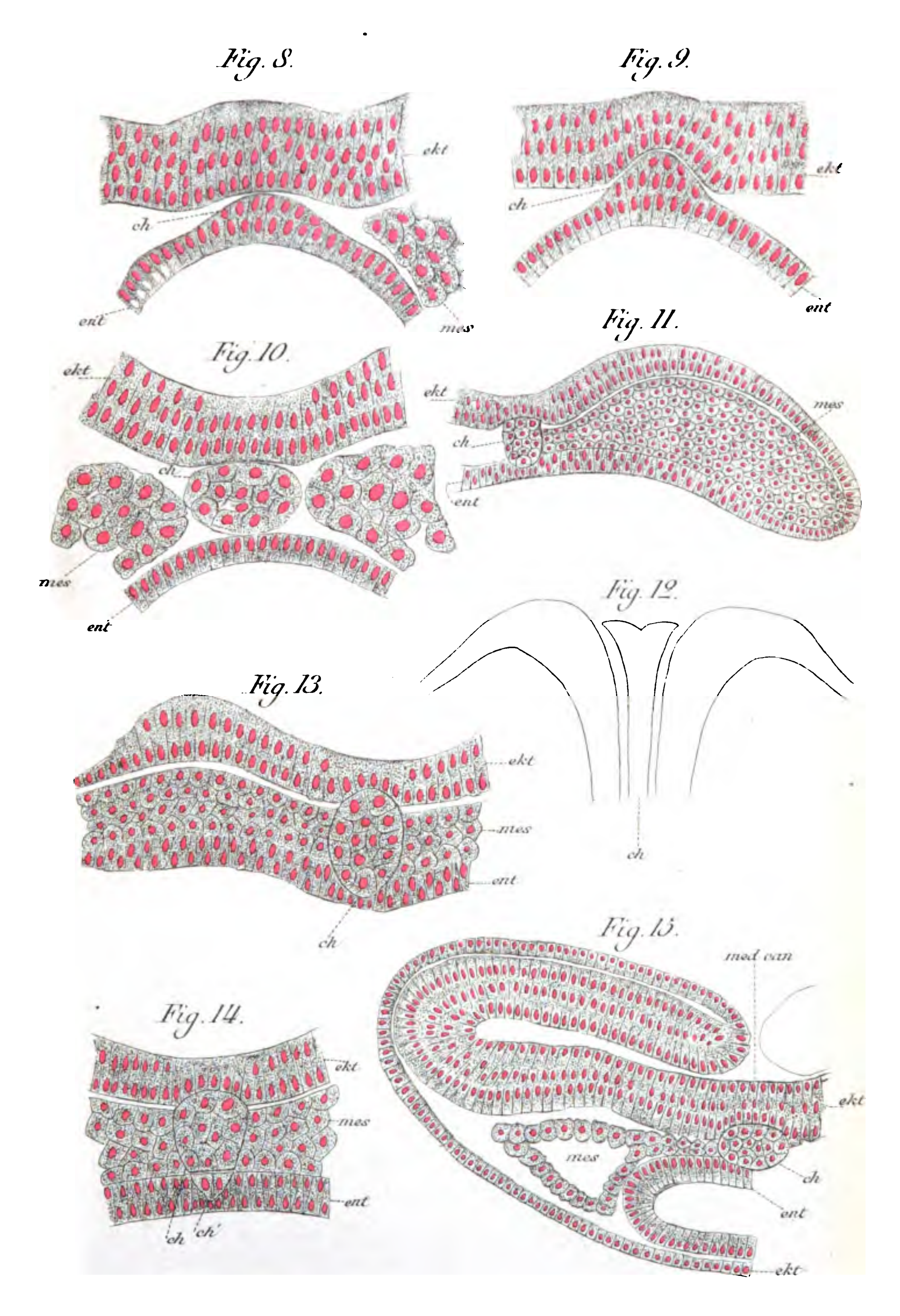


Lith. Emrik & Binger.



Lith. Emrik & Binger




Fig. 8.
ekt
ch
ent
mes
Fig. 9.
ekt
ch
ent
Fig. 10.
ekt
ch
mes
ent
Fig. 11.
ekt
ch
ent
mes
Fig. 12.
ch
Fig. 13.
ekt
mes
ent
ch
Fig. 14.
ekt
mes
ent
ch
ch'
Fig. 15.
med can
ekt
mes
ch
ent
ekt

Lith. Emrī

Nord

Ecliptique.

Cercle de Lat. du Soleil

Sud

20 Déc. Soir.

21 Déc. Matin.

Observation de M. Eylert du 20–21 Déc. 1873

à 35° L. Bor. et 24° L. Occ. Greenw.

Nord

Soleil

Ecliptique.

Sud

2 Déc. Soir.

3 Déc. Matin 1853.

11 Déc. Soir.

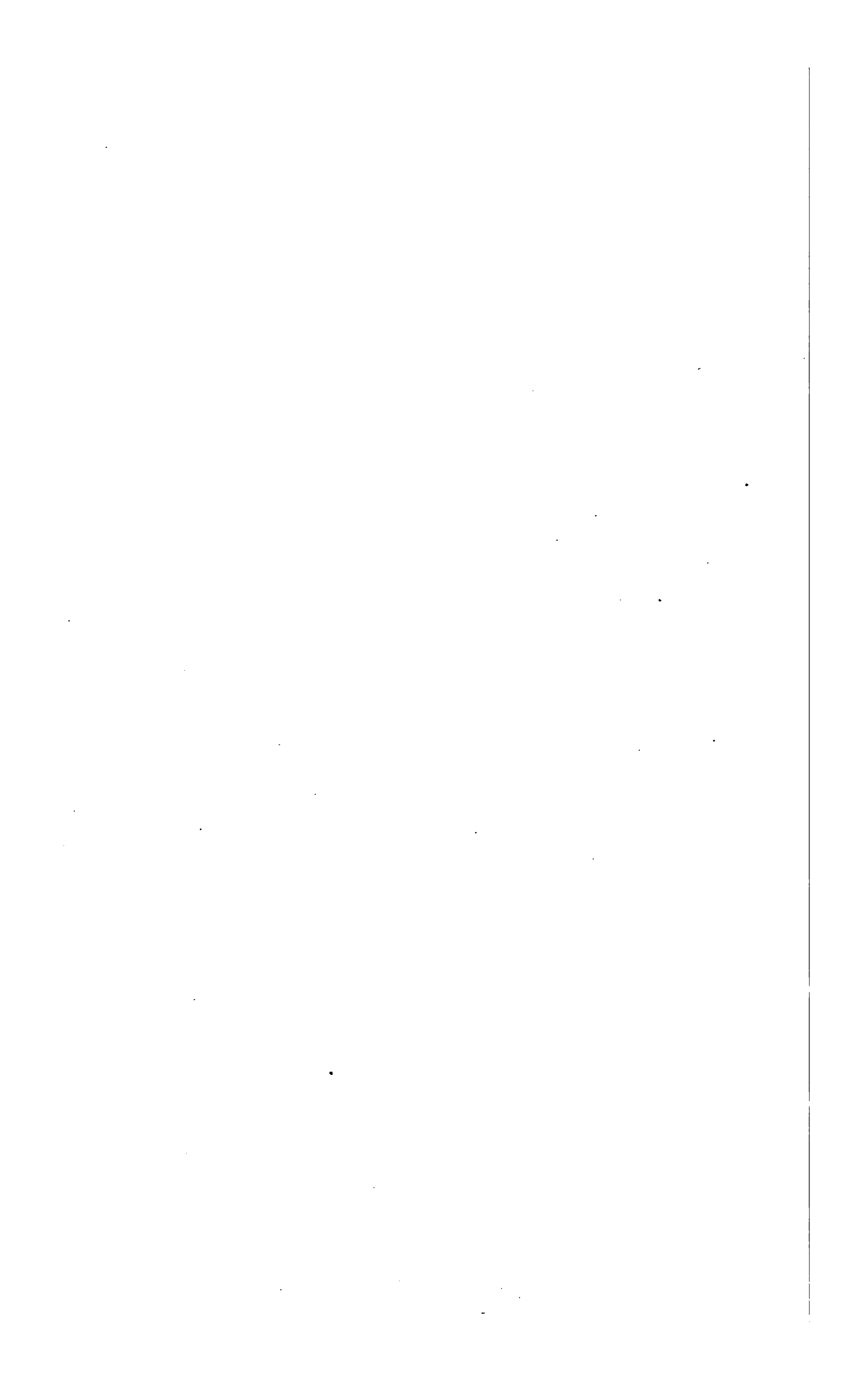
Eclip-tique.

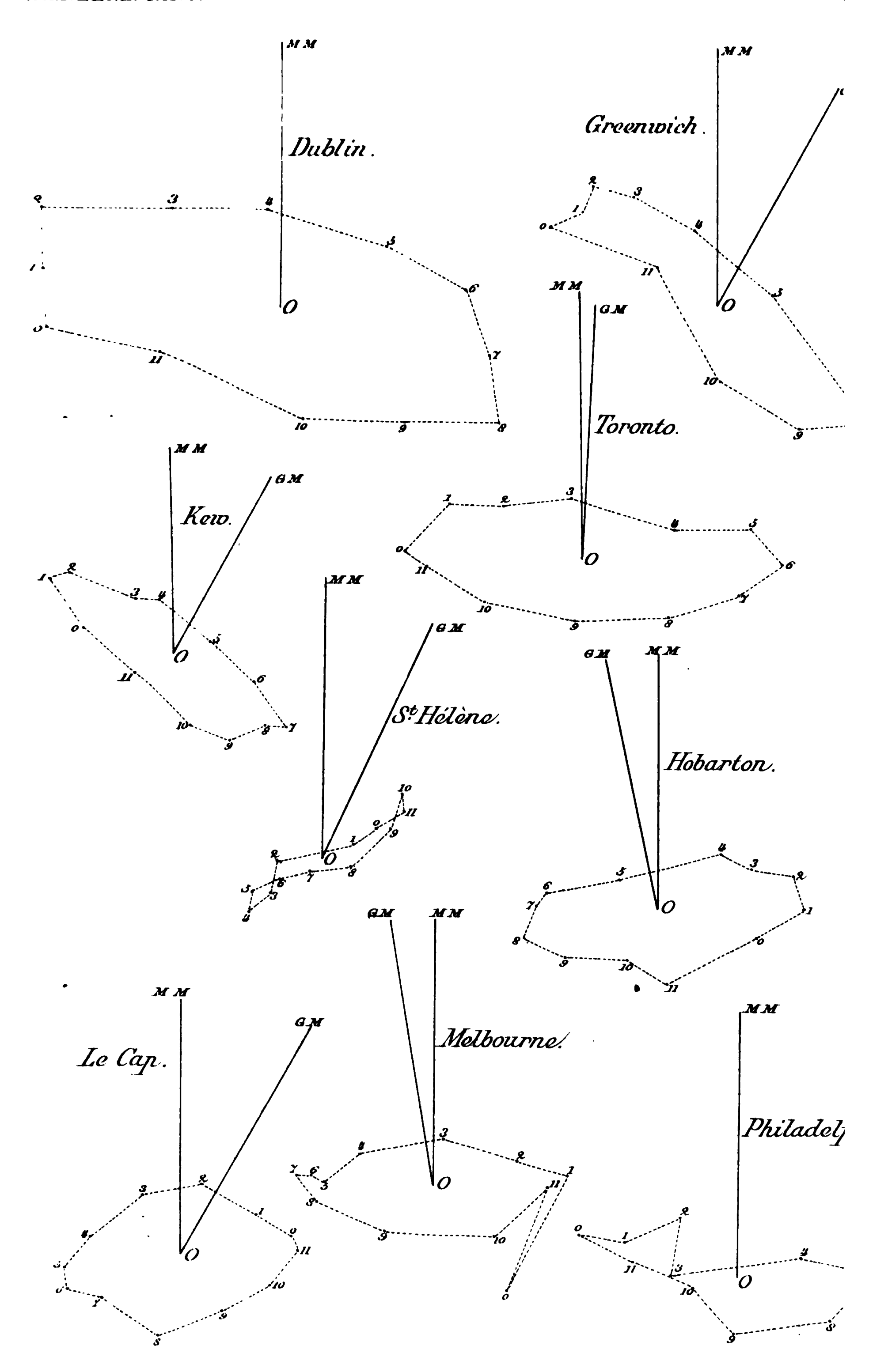
Soleil

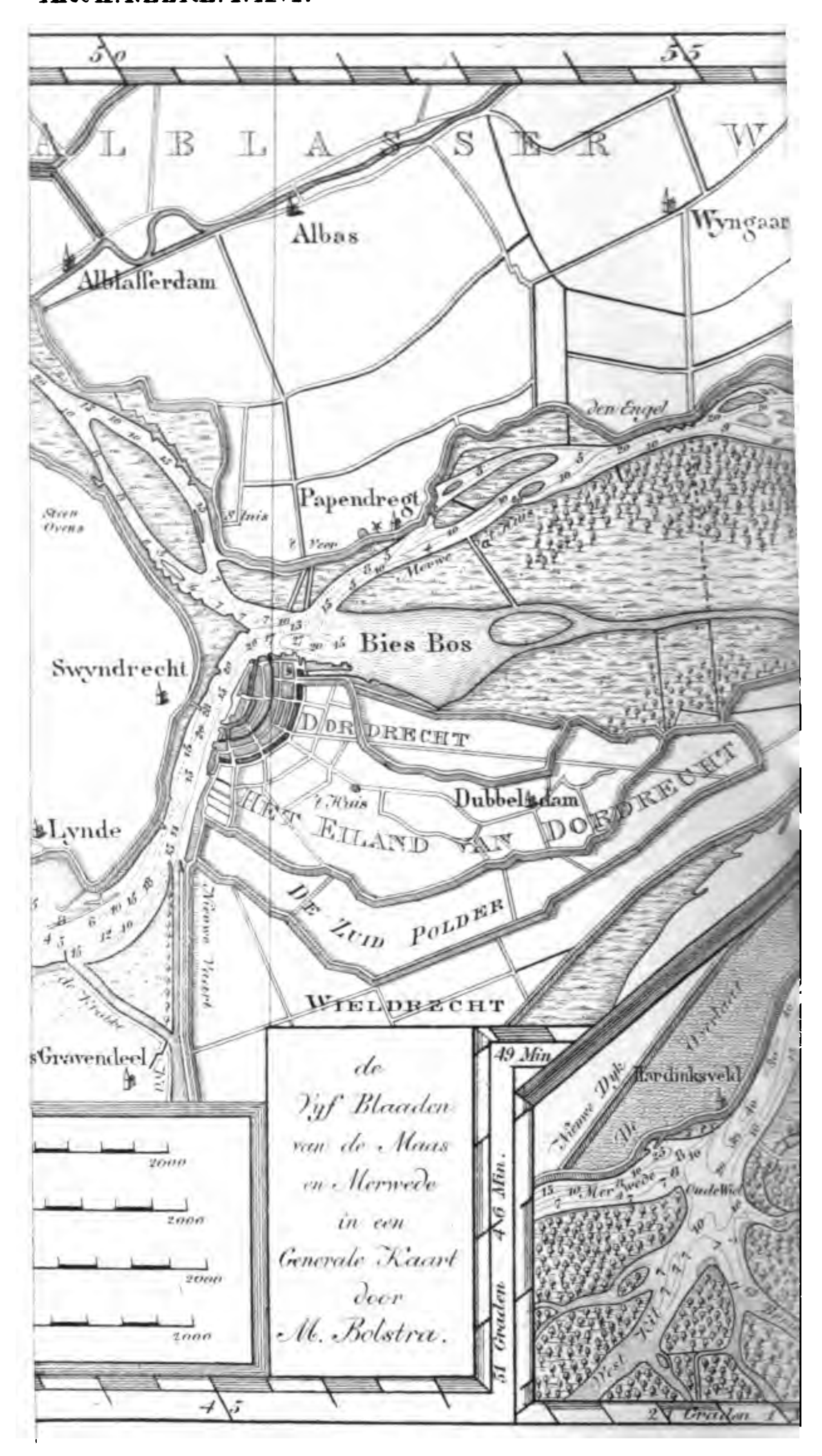
12 Déc. Matin 1852.

Observations de M. Heis du 2–3 Déc. 1853 et du 11–12 Déc. 1852.

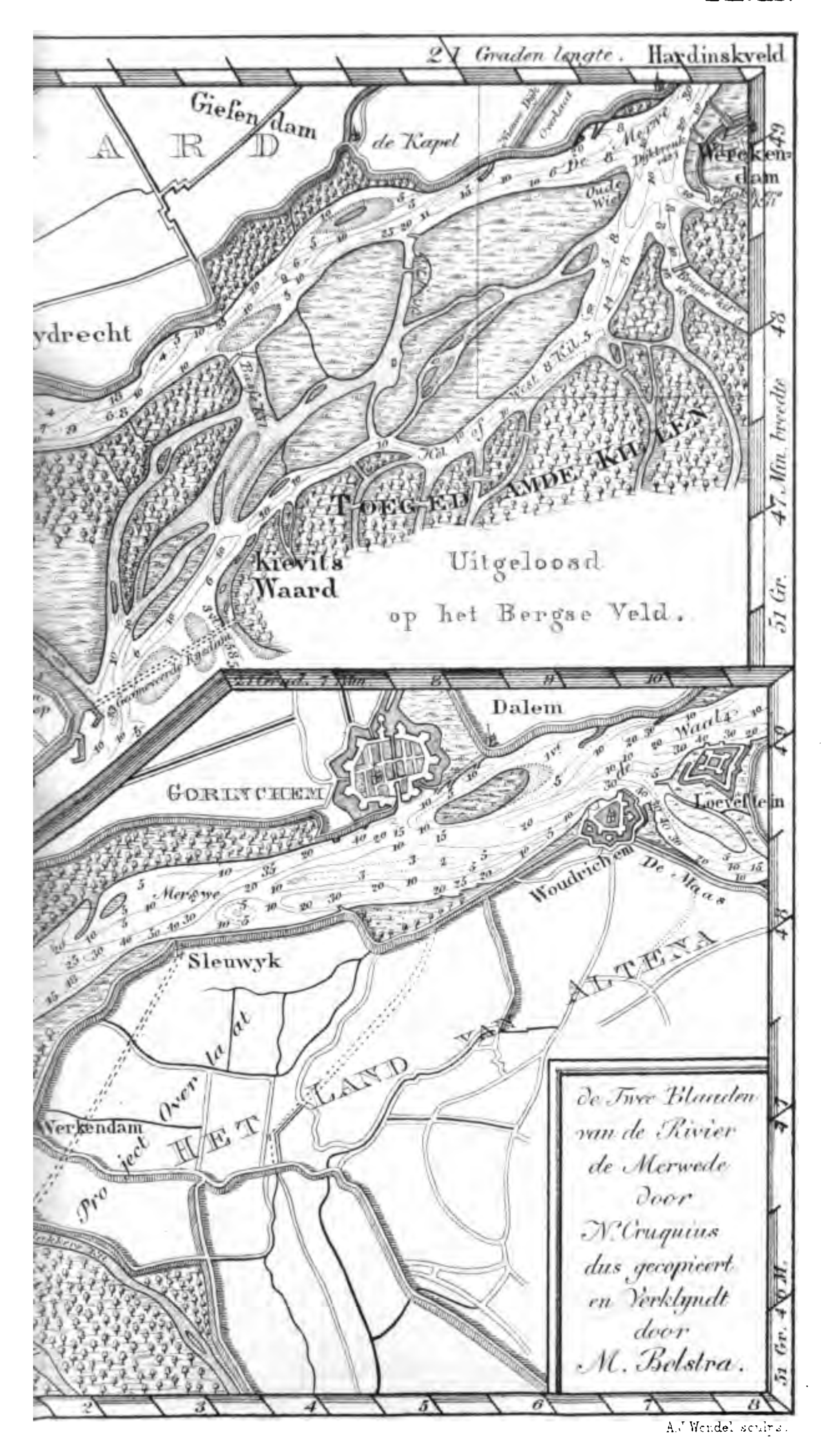
Limites de la Lumière Zodiacale observées dans une même nuit, indiquant




Dublin.
Greenwich.
Toronto.
Kew.
St Hélène.
Hobarton.
Le Cap.
Melbourne.
Philadel


ALBLASSER W
Albas
Wyngaar
Alblasserdam
den Engel
Papendregt
Steen Ovens
Bies Bos
Swyndrecht
DORDRECHT
Dubbeldam
HET EILAND VAN DORDRECHT
Lynde
DE ZUID POLDER
Nieuwe Vaart
WIELDRECHT
de Kraabe
sGravendeel
Hardinksveld
Nieuwe Dyk
Oude Wiel
49 Min.
46 Min.
51 Graden
2 Graden
de
Vyf Bladen
van de Maas
en Merwede
in een
Generale Kaart
door
M. Bolstra.

PL. IX.



A. J. Wendel sculps.





